

圧縮場における弾塑性体の分岐モード・分岐後挙動解析

長岡技術科学大学 環境・建設系 正会員 ○ 山川 優 樹
 東北大学大学院 工学研究科 正会員 池田 清 宏
 東北大学大学院 情報科学研究科 正会員 寺田 賢二郎

1. はじめに

本研究では、均一な弾塑性体が圧縮変形する場合の分岐挙動について解析を行った。一様変形が持続する基本経路からは、分岐により不均一変形が発生し、つり合い経路は基本経路と異なる挙動を示す。有限ひずみを考慮した弾塑性分岐解析を行い、せん断帯・局所化解析のための特殊な構成関係に頼ることなく、高次の分岐モードまで表現可能であることを示す。また、初期不整を導入した疑似分岐解析ではなく、完全系の分岐解析を行う点が本研究の特色である。

2. 有限ひずみ弾塑性境界値問題の設定

ここでは、一般的な有限変形・有限ひずみの弾塑性境界値問題を定式化する。参照配置の領域 Ω 内の任意の物質点 $\mathbf{X}$ で成立するつり合い式、および領域境界 $\partial\Omega$ に課される境界条件は、

$$\nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{P} + \rho_0 \mathbf{b} = \mathbf{0} \text{ in } \Omega, \quad \varphi = \bar{\varphi} \text{ on } \partial_{\varphi} \Omega \subset \partial\Omega, \quad \mathbf{P} \mathbf{N} = \bar{\mathbf{t}} \text{ on } \partial_t \Omega \subset \partial\Omega, \quad \partial_{\varphi} \Omega \cap \partial_t \Omega = \emptyset \dots\dots\dots (1)$$

と与えられる。ここで、 $\mathbf{P}$ は第 1 Piola-Kirchhoff 応力、 ρ_0 は参照配置における物体の密度、 $\mathbf{b}$ は単位質量あたりに作用する物体力、 $\bar{\varphi}$ は $\partial_{\varphi} \Omega$ 上で与えられる変位、 $\bar{\mathbf{t}}$ は $\partial_t \Omega$ 上で与えられる表面力、 $\mathbf{N}$ は $\partial\Omega$ の外向き単位法線である。式(1)と等価な空間表記の弱形式は、

$$g(\varphi, \eta) := \int_{\varphi(\Omega)} \boldsymbol{\sigma} : \text{sym}[\nabla_{\mathbf{x}} \boldsymbol{\eta}] \, dv - \int_{\varphi(\Omega)} \rho \mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\eta} \, dv - \int_{\partial_t \varphi(\Omega)} \bar{\mathbf{t}} \cdot \boldsymbol{\eta} \, ds = 0, \quad \forall \boldsymbol{\eta} \in \mathcal{V} \dots\dots\dots (2)$$

となる。 $\varphi(\Omega)$ は変形後の配置を表し、 $\boldsymbol{\sigma}$ は Cauchy 応力、 $\boldsymbol{\eta}$ は空間 $\mathcal{V} := \{\boldsymbol{\eta} \in \mathbb{R}^3 \mid \eta_i \in H^1(\varphi(\Omega)), \boldsymbol{\eta} = \mathbf{0} \text{ on } \partial_{\varphi} \varphi(\Omega)\}$ に属する試験関数である。さて、弾塑性材料の自由エネルギー Ψ が、蓄えられる弾性エネルギー W と塑性ひずみ硬化によるポテンシャルエネルギー $\hat{K}$ の和として、 $\Psi(\mathbf{b}^e, \xi) := W(\mathbf{b}^e) + \hat{K}(\xi)$ と与えられるものとする。ここで、 $\mathbf{b}^e := \mathbf{F}^e \mathbf{F}^{eT}$ は弾性の左 Cauchy-Green 変形テンソル、 ξ は塑性ひずみ硬化に関する内部変数である。 $\mathbf{b}^e$ の定義に際し、変形勾配 $\mathbf{F}(\mathbf{X}, t) := \nabla_{\mathbf{X}} \varphi(\mathbf{X}, t)$ が $\mathbf{F}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{F}^e(\mathbf{X}, t) \mathbf{F}^p(\mathbf{X}, t)$ と弾性・塑性部分に乘算分解できることを仮定している (Lee, 1969)。このとき弾塑性境界値問題は、つり合い式(2)と

$$\boldsymbol{\tau} = 2(\partial\Psi/\partial\mathbf{b}^e) \cdot \mathbf{b}^e, \quad \mathcal{D} := \boldsymbol{\tau} : [-\frac{1}{2}(\mathcal{L}_{\mathbf{v}} \mathbf{b}^e) \cdot \mathbf{b}^{e-1}] - (\partial\Psi/\partial\xi) \dot{\xi} \geq 0 \dots\dots\dots (3)$$

という超弾性の構成式、および散逸不等式による最大塑性散逸の原理 (Hill, 1950) により定式化することができる (Simo, 1992)。ここで $\boldsymbol{\tau}$ は Kirchhoff 応力、 $\mathcal{L}_{\mathbf{v}}(\bullet)$ は Lie 微分を示す。つり合い式(2)は非線形であるため、線形化して反復的に解く必要がある。増分変位 $\Delta\mathbf{u}$ に関する $g(\varphi, \boldsymbol{\eta})$ の方向微分を考え、つり合い式(2)を $\Delta\mathbf{u}$ について線形化すると、

$$g(\varphi, \boldsymbol{\eta}, \Delta\mathbf{u}) = g(\varphi, \boldsymbol{\eta}) + \text{D}g(\varphi, \boldsymbol{\eta})[\Delta\mathbf{u}] = 0, \quad \text{D}g(\varphi, \boldsymbol{\eta})[\Delta\mathbf{u}] = \int_{\varphi(\Omega)} \text{sym}[\nabla_{\mathbf{x}} \boldsymbol{\eta}] : \frac{\mathbf{c}^{\text{ep}}}{J} : \text{sym}[\nabla_{\mathbf{x}}(\Delta\mathbf{u})] \, dv + \int_{\varphi(\Omega)} \boldsymbol{\sigma} : \{[\nabla_{\mathbf{x}} \boldsymbol{\eta}]^T \{\nabla_{\mathbf{x}}(\Delta\mathbf{u})\}\} \, dv \dots\dots\dots (4)$$

となる。ここで $J := \det \mathbf{F}$ であり、 $\mathbf{c}^{\text{ep}}$ は $\mathcal{L}_{\Delta\mathbf{u}} \boldsymbol{\tau} = \mathbf{c}^{\text{ep}} : \text{sym}[\nabla_{\mathbf{x}}(\Delta\mathbf{u})]$ で与えられる 4 階の consistent 材料接線係数テンソル (Simo and Taylor, 1985) である。式(4)₂を有限要素離散化することにより接線剛性マトリックスが得られる。

3. 弾塑性分岐解析手法

Hill (1958) による弾塑性分岐条件を離散系に適用すると、

$$\mathbf{K} \mathbf{U} = \mathbf{0} \iff \det \mathbf{K} = 0, \quad \mathbf{U} = \mathbf{U}_{\text{II}} - \mathbf{U}_{\text{I}} \dots\dots\dots (5)$$

と帰着させることができる。ここで、 $\mathbf{K}$ は式(4)₂を有限要素離散化することにより得られる接線剛性マトリックス、 $\mathbf{U}_{\text{I}}$ 、 $\mathbf{U}_{\text{II}}$ は節点増分変位ベクトルであり、それぞれ基本経路、分岐経路の解に対応する。分岐条件式(5)から分かるように、つり合い経路上で分岐点の判別を行うためには、 $\mathbf{K}$ の固有値をモニタリングする必要がある。また、基本経路から分岐経路へのアクセスを行う際には、反復計算の変位予測子として用いるために、分岐点における $\mathbf{K}$ のゼロ固有値に対応するクリティカルな固有ベクトルを精度よく求める必要がある。しかしながら、多自由度を有する大規模解析において $\mathbf{K}$ の固有値・固有ベクトルを直接求めることは非常に困難であるため、本研究では、非線形方程式解法の際の $\mathbf{K}$ の $\mathbf{LDL}^T$ 分解情報からクリティカルな近似固有ベクトルを抽出する手法 (藤井・野口, 1999) を用いた。この手法により、 $\mathbf{K}$ の三角分解にわずかな付加的な手続きを行うだけで、大規模自由度の分岐解析が可能となる。

4. 数値解析

ここでは、圧縮変形場の弾塑性分岐解析結果を示す。材料の構成式は、von-Mises の降伏条件に従う、等方硬化型あるいは軟化型の J_2 -流れ則を用いることとする。硬化パラメータ (相当塑性ひずみ) $\varepsilon^p := \xi$ と相当 Kirchhoff 応力 $\bar{\tau} := \sqrt{3/2} \|\text{dev}[\boldsymbol{\tau}]\| = \hat{K}'(\xi)$ の関係は、図-1 に示す硬化型、および図-2 に示す軟化型の 2 種類を用いた。

解析モデルを 図-3 に示す。生じうる分岐モードを制限しないようにするため、対称解析ではなく全領域解析を行った。平面ひずみ条件を仮定し、初期形状比 $H_0/W_0 = 2.5$ の矩形領域の上端に y 方向一様変位が与えられるものとし、上下端面は摩擦のない境界とする。この境界条件の下では、基本経路上では均一変形が進行し、一様な一軸応力状態であり、全領域で塑性負荷が持続するが、分岐による不均一変形により、変形が局所化していき、除荷域が進展してゆく。

まず、図-1 の硬化型材料を用いた場合の解析結果を示す。図-4 がつり合い経路であり、実線は基本経路を、破線は分岐経路をそれぞれ示す。各経路は近接しているため、分岐点付近を拡大して示してある。圧縮変形では、材料が硬化型であるに加えて、変形に伴って断面が増加していくため、基本経路の荷重は増加していく。基本経路上には 3 つの分岐点が存在し、各分岐点から分岐経路へのアクセスを行った。第 1 分岐経路のみ、分岐点の後に荷重が低下し始めている。分岐後の変形の様子と、相当塑性ひずみの分布を 図-5 に示す。変形は実寸である。

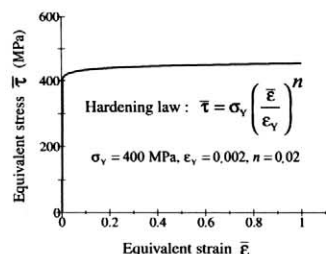


図-1 硬化型の応力～ひずみ関係

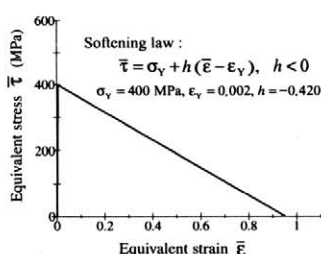


図-2 軟化型の応力～ひずみ関係

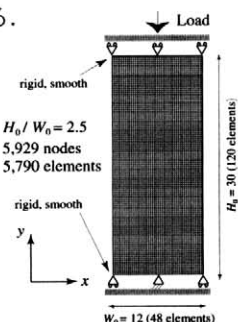


図-3 解析モデル

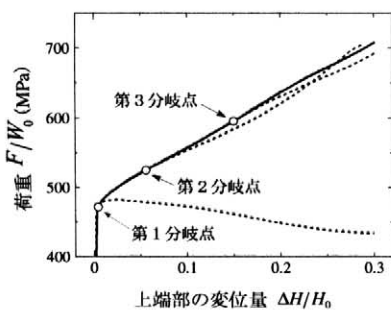


図-4 硬化型材料の場合のつり合い経路

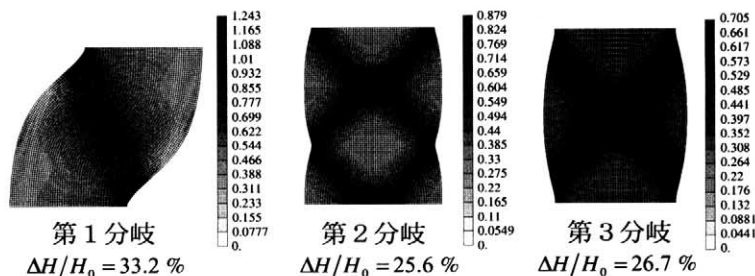


図-5 硬化型材料の場合の分岐後の相当塑性ひずみ分布 (変形は実寸)

次に、図-2 の軟化型材料を用いた場合の解析結果を示す。図-6 がつり合い経路であり、実線は基本経路を、破線は分岐経路をそれぞれ示す。また、図中の括弧内数字は分岐点の番号および対応する分岐経路の番号を示す。分岐点は近接して発生しているため、その付近を拡大して示してある。硬化型材料の場合と異なり、軟化型材料の場合には、圧縮変形においても基本経路上に荷重極大点が存在し、それ以降は荷重が低下していく。基本経路上には 14 個の分岐点が存在し、そのうち 12 個が荷重極大点以前に発生した。第 1, 2, 3, 4, 5, 7, 10, 14 分岐点について分岐経路へのアクセスを行った。荷重極大点以前に発生した分岐経路では、いずれも分岐直後は荷重が増加するが、その後、荷重は低下に転ずる。各分岐経路上での変形の様子と、相当塑性ひずみの分布を 図-7 に示す。変形倍率は 5 倍で示してある。図には示していないが、除荷域の進展具合を調べてみると、数要素幅程度のバンド状領域に負荷域が集中し、それ以外の領域は除荷となっており、硬化型材料の場合と比較して、変形の局所化が著しいことがわかる。

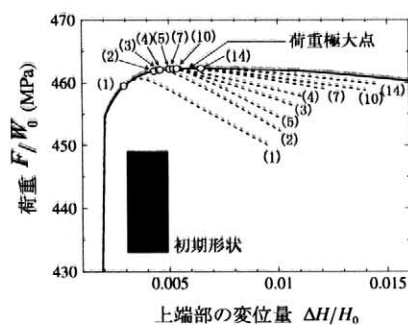


図-6 軟化型材料の場合のつり合い経路

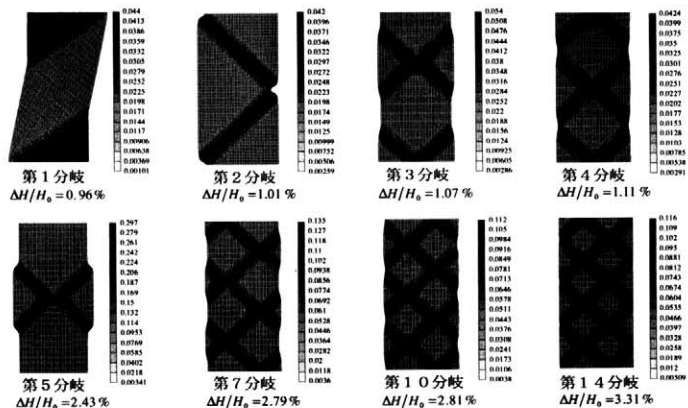


図-7 軟化型材料の場合の分岐後の相当塑性ひずみ分布 (変形倍率 5 倍)