Drucker の安定条件を満たす非共軸流動則

東北大学　正　員　岸野佑次
東北大学　学生員　金子賢治

１．はじめに

材料の構成則に非関連流動則を用いた場合，応力ひずみ関係におけるピーク以前の硬化過程において不安定となり得ることが問題となっている．岸野ら[1)]は粒状体の詳細な応力プローブシミュレーション試験により，安定的な硬化状態において，塑性ひずみ増分の方向が一定とはならず，結果として Hill の安定条件が満たされることを見出した．ここでは，流動則に単純な非共軸補正項を付加することにより, Drucker の安定条件を満たすように応力増分塑性ひずみ増分関係を定め，これを粒状体のシミュレーション解析結果と比較して考察する．

２．非共軸流動則

古典的塑性論の非関連流動則は次式のように表わされる．

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{p} = am_{ij}n_{kl}\dot{\sigma}_{kl}, \quad m_{ij}m_{ij} = 1, \quad n_{ij}n_{ij} = 1 \tag{1}$$

ここに， m_{ij}, n_{ij} は，それぞれ，ひずみ空間における塑性ひずみ速度の方向，応力空間における降伏面の外向き法線ベクトルの方向を表わす．この流動則を用いると，図-1のハッチを施した方向の応力増分に対して $m_{ij}\dot{\sigma}_{ij} < 0$ となり，Drucker の安定条件が満たされないことになる．しかし，粒状要素法を用いた詳細な応力プローブ試験を行ったところ，式(1) の流動則からずれが生じ，このずれのために，安定的な硬化状態においては Drucker の安定条件がほぼ満たされるとの結果を得た．本文においては, このずれを表現するための最も簡単な補正として，Rudnicki & Rice[2)]が局所化解析のために用いた補正に習い，次の塑性ひずみ速度−応力速度関係をもとに考察を進める．

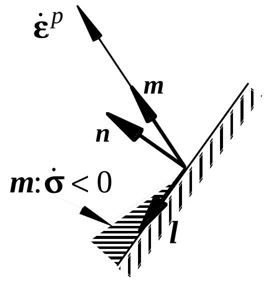

図-1　降伏面

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{p} = am_{ij}n_{kl}\dot{\sigma}_{kl} + b(\dot{\sigma}_{ij} - n_{ij}n_{kl}\dot{\sigma}_{kl}) \tag{2}$$

上式第２項は式 (1) には考慮されていない応力増分の降伏面接線成分を考慮するための補正項である．ただし，Rudnicki & Rice は補正項に応力速度の偏差部分のみを用いているが，ここでは，等方部分含めた．材料が等方的で第１項が共軸的（応力の主軸と塑性ひずみ速度の主軸が一致）であっても，応力速度主軸が応力主軸と一致しない場合，第２項は非共軸性の原因となるので，これを非共軸項と称することとする．

３．Drucker の安定条件に基づく制約条件

Drucker の安定条件は，式(2) を用いると，

$$\dot{\sigma}_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}^{p} = \{am_{ij}n_{kl} + b(\delta_{ik}\delta_{jl} - n_{ij}n_{kl})\}\dot{\sigma}_{ij}\dot{\sigma}_{kl} \geq 0 \tag{3}$$

と表わされる．ここでは，任意の応力速度に対してこの不等式を成立させるための制約条件を求める．このために，図-1 のハッチを施した方向の応力速度について吟味するために，応力空間において降伏面に接するベクトル $\boldsymbol{l}$ を用いて，応力速度を次式のように置いておくこととする．

$$\dot{\sigma}_{ij} = c(l_{ij} + \alpha n_{ij}) \quad c > 0, \quad \alpha \geq 0, \quad l_{ij}l_{ij} = 1, \quad l_{ij}n_{ij} = 0 \tag{4}$$

ここで，非関連の度合いを表す係数（関連の場合１）を

$$k = m_{ij}n_{ij} \quad (\,1 \geq k > 0\,) \tag{5}$$

と置く．このとき，降伏面接平面内で変化する $\boldsymbol{l}$ に対して，次式が成立する．

$$\sqrt{1-k^2} \geq l_{ij}m_{ij} \geq -\sqrt{1-k^2} \tag{6}$$

この不等式を考慮すれば，塑性ひずみを生じる任意の応力速度に対して式(3) が成立する条件は次式となる．

$$ac^2(-\sqrt{1-k^2} + \alpha k)\alpha + bc^2 \geq 0 \tag{7}$$

また，流動則における非共軸項の寄与率を次式のように置く．

$$r = b/a > 0 \tag{8}$$

キーワード：Drucker の安定条件，非共軸流動則，粒状要素法，応力プローブ試験

連絡先：〒980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉06 土木工学科 （電話）022-217-7421 （FAX）022-217-7423

このとき，不等式(7) は次式のように表わされる．

$$k\alpha^2 - \sqrt{1-k^2}\,\alpha + r \ge 0 \tag{9}$$

よって，任意の $\alpha \ge 0$ について Drucker の安定条件が成立するための条件は，上式左辺を零と置いた方程式が重根または虚根を持てばよいことになり，これより，次の不等式を得る．

$$r \ge \frac{1-k^2}{4k} \tag{10}$$

４．粒状要素法による応力プローブ試験による検討

ここでは，Drucker の安定条件を満たす非共軸流動則における非共軸補性項の寄与率が最小で，r が不等式(10) の最小値をとる場合の検討を行う．粒状要素法による試験に用いた粒状体モデルを図-2 に示す．粒子間摩擦角は 25°，法線および接線方向のバネ定数は1.0×10^4 および 7.0×10^3 N/m とした．図中の枠内を周期境界の単位要素とし，等方圧（0.2MPa）状態より，$\sigma_1 = 0.2$MPa 一定，$\Delta\sigma_2 = 0.05$MPa の２軸圧縮試験を行った．

応力ひずみ関係を図-3 に示す．この試験の中途データより出発して，主応力空間における 10°毎の 36 通りの方向に対して，応力増分の大きさを $\sqrt{\Delta\boldsymbol{\sigma}:\Delta\boldsymbol{\sigma}} = 0.01$MPa とした共軸的な応力プローブ試験を行った．以下に図中の●印を付した最大せん断ひずみ 1% の点に対する結果を示す．

各応力増分方向に対して得られた塑性ひずみ増分方向を図-4 に，塑性ひずみ増分の大きさを図-5 に示す．これらの図における方向角は主応力空間における第１主軸の圧縮方向を０°とする反時計回りの角度を表わす．図-4, 5 よりそれぞれ式(2) における $\boldsymbol{m}$ と $\boldsymbol{n}$ の方向を定めることができる．これらの方向は第１主軸からの角度で，それぞれ，135°, 154°と定められるので，$\boldsymbol{m}$ と $\boldsymbol{n}$ の複内積は $k = 0.946$ となる．これを式(10) の右辺に代入すれば，$r = 0.0280$ が得られる．式(2) における a の値を図-5 の最大値 0.0244 に定めれば，Drucker の安定条件を満たす非共軸流動則の応力増分塑性ひずみ増分関係を定めることができる．このようにして求めた値は図 - 4, 5 に示してある．若干のずれがあるが，応力プローブシミュレーション試験結果と理論値とは良く適合している．これらの図には，非共軸項を付加しない古典的非関連流動則に対するプロットも示したが，プローブ試験結果と大きな差異があることがわかる．

図 - 4 に描いた斜めの線は応力，塑性ひずみ増分方向が鋭角をなす限界線を表わし，非共軸流動則のプロットが Drucker の安定条件を満たしていることがわかる．しかし，プローブ試験結果では，塑性ひずみ増分が小さな１方向に対して不安定側に入っている．さらにピークに近づいた段階における同様の検討より，試験と理論の差が大きくなり，不安定なプローブ方向が増加する傾向が得られている．以上より，ここに示した Drucker の安定条件を満たす非共軸流動則は非古典的塑性理論におけるひとつの基準的流動則になり得ると言えよう．

参考文献

1) 岸野・武, 土木学会論文集, No.631 (1999), pp.83-95.

2) Rudnicki & Rice, J. Mech. Phys. Solid, Vol.23 (1975), pp.371-394.

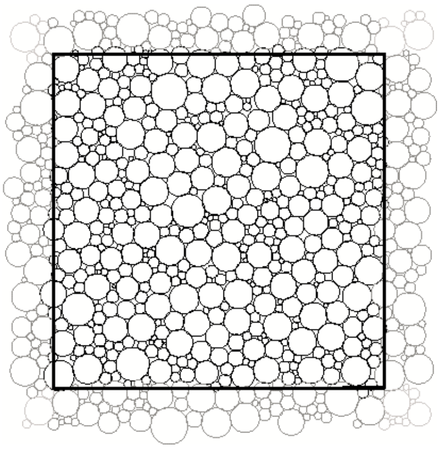

図-2 解析に用いた粒状体モデル

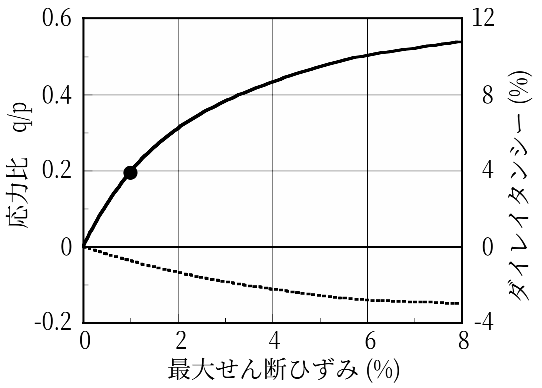

図-3　応力ひずみ関係

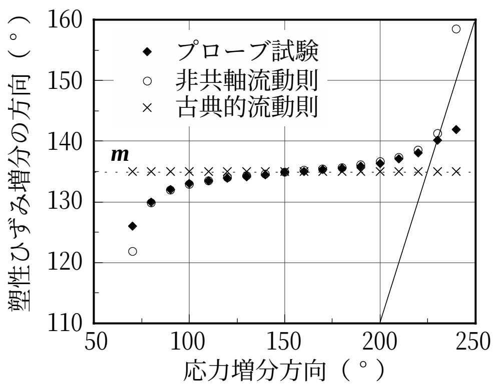

図-4　塑性ひずみ増分の方向

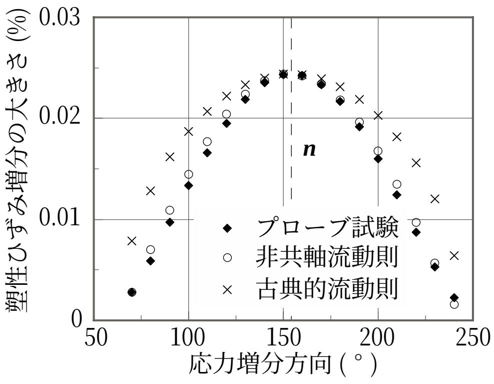

図-5　塑性ひずみ増分の大きさ