# 複断面流れの二次流の再現性に関する二次及び三次非線形 $k$-εモデルの比較

四日市大学環境情報学部　正員　木村　一郎*
京都大学工学研究科　　正員　細田　　尚**

## １．はじめに

$k$-εモデルに代表される二方程式型乱流モデルは，現在のところ精度と計算機負荷のバランスのとれたモデルと考えられる．複断面開水路流れの断面内における第二種二次流を $k$-εモデルの枠組みの中で再現するためには，最低でも二次の非線形項までを含む非線形 $k$-εモデルによる必要がある．本研究では，Tominaga and Nezu (1991)[1)]の実験を対象に，二次および三次非線形 $k$-εモデルを用いて二次流の再現を行い，結果を比較する．

## ２．基礎式と数値解析法

**基礎式**　$k$-εモデルの基礎式系は，次のように連続式，運動方程式，$k$-方程式，ε-方程式からなる．

$$\frac{\partial U_i}{\partial x_i}=0 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial U_i}{\partial t}+\frac{\partial U_j U_i}{\partial x_j}=g_i-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i}+\frac{\partial \left(-\overline{u_i u_j}\right)}{\partial x_j}+\nu\frac{\partial^2 U_i}{\partial {x_j}^2} \qquad (2)$$

$$\frac{\partial k}{\partial t}+\frac{\partial kU_j}{\partial x_j}=-\overline{u_i u_j}\frac{\partial U_i}{\partial x_j}-\varepsilon+\frac{\partial}{\partial x_j}\left\{\left(\frac{D_t}{\sigma_k}+\nu\right)\frac{\partial k}{\partial x_j}\right\} \qquad (3)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}+\frac{\partial \varepsilon U_j}{\partial x_j}=-C_{\varepsilon 1}\frac{\varepsilon}{k}\overline{u_i u_j}\frac{\partial U_i}{\partial x_j}-C_{\varepsilon 2}\frac{\varepsilon^2}{k}+\frac{\partial}{\partial x_j}\left\{\left(\frac{D_t}{\sigma_\varepsilon}+\nu\right)\frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j}\right\} \qquad (4)$$

ここに，$U$：平均流速，$P$：平均圧力，$u$：乱れ速度，ν：動粘性係数，ρ：密度，$k$：乱れエネルギー，ε：散逸率，$D_t$：渦動粘性係数を表わす．添字 $i, j$ には総和の規則を用いる．モデル定数には標準的な値を用いる．

**乱流モデル**　本研究では二次および三次の非線形 $k$-εモデルを用いる．まず，二次非線形モデルにおけるレイノルズ応力の構成方程式は次式で表される(Yoshizawa, 1984)[2)]．

$$-\overline{u_i u_j}=D_t S_{ij}-\frac{2}{3}k\delta_{ij}-\frac{k}{\varepsilon}D_t\sum_{\beta=1}^{3}C_\beta\left(S_{\beta ij}-\frac{1}{3}S_{\beta\alpha\alpha}\delta_{ij}\right),\quad S_{ij}=\frac{\partial U_i}{\partial x_j}+\frac{\partial U_j}{\partial x_i},\quad \Omega_{ij}=\frac{\partial U_i}{\partial x_j}-\frac{\partial U_j}{\partial x_i}$$

$$D_t=C_\mu\frac{k^2}{\varepsilon},\quad S_{1ij}=\frac{\partial U_i}{\partial x_\gamma}\frac{\partial U_j}{\partial x_\gamma},\quad S_{2ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_\gamma}{\partial x_i}\frac{\partial U_j}{\partial x_\gamma}+\frac{\partial U_\gamma}{\partial x_j}\frac{\partial U_i}{\partial x_\gamma}\right),\quad S_{3ij}=\frac{\partial U_\gamma}{\partial x_i}\frac{\partial U_\gamma}{\partial x_j} \qquad (5)$$

Cμは，Realizability を考慮し，ストレインパラメータ S とローテイションパラメータΩの関数とした[3)]．

$$C(M)_\mu=\min\left[0.09,\ 0.3/(1+0.09M^2)\right],\quad M=\max(S,\Omega),\quad S=\frac{k}{\varepsilon}\sqrt{\frac{1}{2}S_{ij}S_{ij}},\quad \Omega=\frac{k}{\varepsilon}\sqrt{\frac{1}{2}\Omega_{ij}\Omega_{ij}} \qquad (6)$$

また，係数 $C_1$～$C_3$ については，単純せん断流における実験結果との比較等から，次のように与えた[3)]．

$$C_1=0.4f_M(M),\quad C_2=0,\quad C_3=-0.13f_M(M),\quad f_M(M)=\left(1+0.01M^2\right)^{-1} \qquad (7)$$

三次の非線形モデルの構成方程式は，式(5)に次の Cubic Term を付加した式となる[4)]．

$$\text{[cubic terms]}=-C_4\frac{k^2}{\varepsilon^2}D_t(\Omega_{ik}S_{kl}S_{lj}-S_{ik}S_{kl}\Omega_{lj})-C_5\frac{k^2}{\varepsilon^2}D_t\left(\Omega_{ik}\Omega_{kl}S_{lj}+S_{ik}\Omega_{kl}\Omega_{lj}-\frac{2}{3}S_{mn}\Omega_{no}\Omega_{om}\delta_{ij}\right) \qquad (8)$$

係数 $C_4$，$C_5$ については，幾通りかのテスト計算の結果，次式を採用した．

$$C_4=-0.02\,(1+0.01\,M^2)^{-1},\quad C_5=0.0 \qquad (9)$$

**水面の計算**　表層の連続式と運動方程式に関しては，基礎式(1)，(2)を自由水面を考慮して表層のコントロールボリュームで積分した式を用い，水面変動を計算した．また，自由表面近傍での鉛直方向の乱れの減衰を考慮するため，式(10)に示す減衰関数を渦動粘性係数に乗じる．表層のεは杉山[5)]が提案する(11)式を用いた．

$$f_s=1-\exp\left(-B\frac{(h-y)\varepsilon_s}{{k_s}^{3/2}}\right),\quad (B=10) \qquad (10)$$

$$\varepsilon_s=\frac{{C_{\mu 0}}^{3/4}{k_s}^{3/2}}{0.4\Delta y_s},\quad (C_{\mu 0}=0.09) \qquad (11)$$

---

キーワード：複断面開水路流れ，非線形 $k$-εモデル，第二種二次流

連絡先　*〒512-8512　三重県四日市市萱生町1200　TEL 0593-65-6599, FAX 0593-65-6617
**〒606-8501　京都市左京区吉田本町　TEL 075-753-5075, FAX 075-761-0646

上式で添字sは表層の値を，$\Delta y_s$ は水面からの距離を表す．

**計算スキーム**　基礎式は有限体積法により離散化された．運動方程式の移流項には QUICK を，$k$ 及び$\varepsilon$方程式の移流項には Hyblid 法を用い，時間積分は二次の Adams-Bashforth 法とした．圧力は収束計算で求めた．

## ３．数値解析結果の考察

**計算の条件**　Tominaga and Nezu(1991)による実験[1]（Case S-2）と同条件で，再現計算を行った．実験水路の断面形状と記号の定義を図１に，水理緒量を表１に示す．底面は低水路，高水敷ともに滑面となっている．

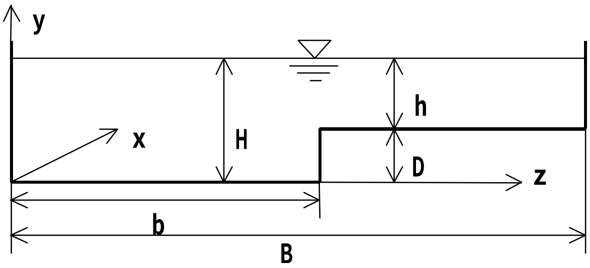



図１　横断面内の記号

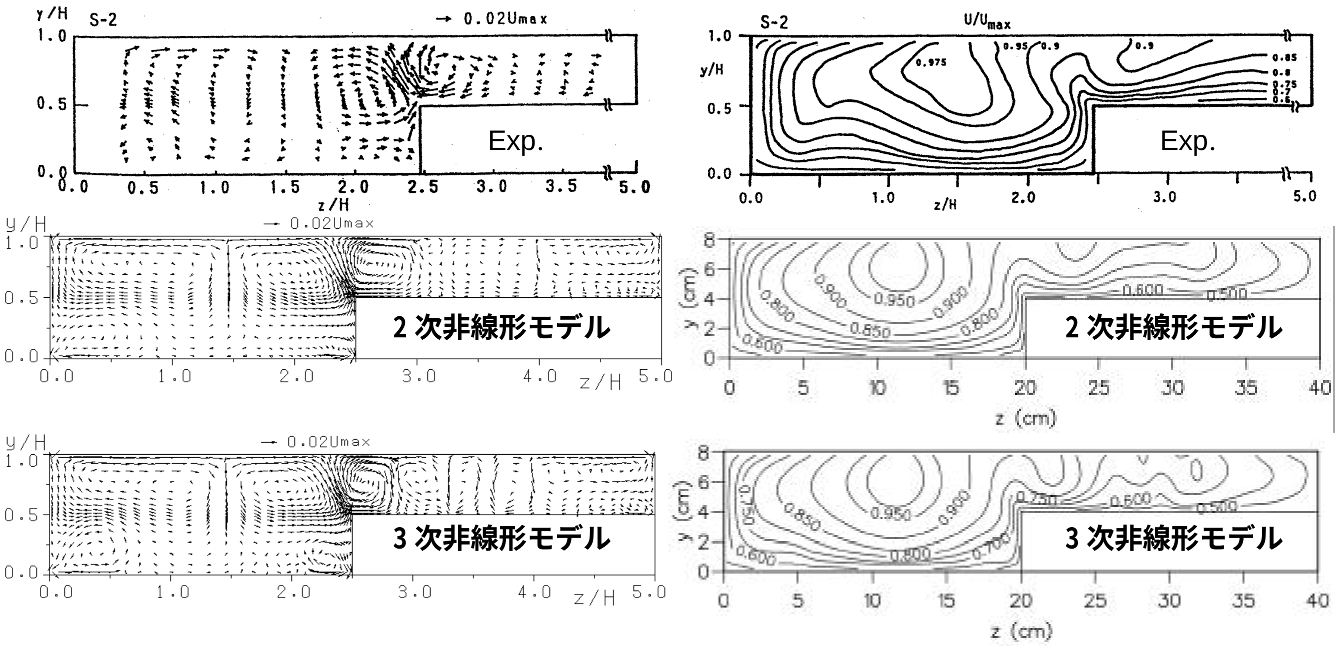
表１　Tominaga and Nezu(1991) Case S-2 の水理条件

| H (cm) | h (cm) | B (m) | b (m) | 最大流速 $U_{max}$ (m/s) | 摩擦速度 $U_*$ (m/s) | 平均速度 $U_m$ (m/s) | レイノルズ数 $4U_mR/\nu$ | フルード数 $U_m/(gh)^{0.5}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 8.0 | 4.0 | 0.4 | 0.2 | 0.389 | 0.0164 | 0.349 | 54500 | 0.393 |

計算格子は可変直交格子とし，格子数は $y$ 方向が 17，$z$ 方向が 62 とした．また，本研究の目的は断面内の流況の再現である点を考慮して，$x$ 方向の格子数を５格子とし，上下流端には周期境界条件を課した．

**計算結果の考察**　図２(a)は，断面何の二次流の流速ベクトルを，実験結果と計算結果（二次非線形モデルと三次非線形モデル）で比較したものである．いずれの数値計算結果にも斜昇流が再現され，低水路内にみられる水面付近および底面付近の左右の渦も，定性的に再現されている．また，低水路中心線より若干右側の水面付近の流れの沈み込み位置も，ほぼ実験結果と一致する．しかし，低水路河床付近の隅角部にみられる左右の渦は，三次非線形モデルの方が明確に再現されており，実験との適合性が向上している．図２(b)は主流流速の等値線を示したものである．いずれのモデルにおいても Velocity dip が再現されている．しかしながら，二次非線形モデルでは斜昇流に伴う低流速部の張り出しが十分再現されていない．また，低水路左岸河床付近の等値線の形状についても，三次非線形モデルの方が良好な結果を与えている．

**参考文献**：1) Tominaga & Nezu (1991), J. Hydraulic Eng., **117**, pp.21-41.　2) Yoshizawa (1984), Phys. Fluids, **27**, pp.1377-1387.　3)木村・細田(2000), 水工学論文集,**44**, pp.599-604.　4) Hosoda et al (1998), ISFMTM '98, Tainan, pp.355-362.　5)杉山他(1995), 土木学会論文集, **515**, pp.55-65.　6) Naot et al(1993), J. Hydraulic Eng, **119**.




(a) 流速ベクトル　　　(b) 等流速線

図２ 二次非線形モデル及び三次非線形モデルによる二次流の再現性の比較