

CIP 法による不連続を伴う流れの解析

日本建設コンサルタント(株) 正員 朱木蘭
 北海道大学工学部 正員 清水康行
 日本建設コンサルタント(株) 正員 西本直史

1. はじめに

常射流混在流れ、ダムブレイク、氾濫流などの不連続を伴う流れが河川学上非常に重要な現象である。不連続な境界（例えば、落差工）を有する河道の計画や、氾濫流による経済損害評価などに際しては、これらの不連続を伴う流れ現象を有効に解析できる計算法の開発が必要とされている。矢部¹⁾によって提案された CIP 法（Cubic-Interpolated pseudoparticle）は計算の不安定性を引き起こしやすい移流項を分離解法によって処理する新しい計算法として注目されている。本論文では、1次元自由水面流れの計算において、CIP 法を運動方程式中の移流項の計算に適用し、SMAC 計算アルゴリズムより連続方程式と運動方程式を連立して流れを陰的に計算するモデルの構築を行ったものである。計算結果は1次元段波の理論解、及び1次元の完全越流の実測値などと比較され、モデルの検証が行われた。

2. 基礎式と計算方法

1次元自由水面流れの運動方程式は(1)で表される：

$$\frac{\partial f}{\partial t} + u \frac{\partial f}{\partial x} = g^* \quad (1)$$

ここに、 g^* は水面勾配項、抵抗項、粘性項などで、 f が流速であると考えればよい。(1)式を次のように Non-advection Phase の(2)式と Advection Phase の(3)式に分離する：

$$\frac{f^* - f^n}{\Delta t} = g^* \quad (2)$$

$$\frac{f^{n+1} - f^*}{\Delta t} + u \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad (3)$$

ここに、 n は時間ステップである。(3)式は波動方程式であるため、将来の $f(x_i, t + \Delta t)$ は現在の $f(x_i - u\Delta t, t)$ そのまま伝わって行く性質を持っている。つまり：

$$f(x_i, t + \Delta t) = f(x_{i-1} - u\Delta t, t) \quad (4)$$

なお、 $u > 0$ の場合、既知した $f(x_{i-1}, t)$ と $f(x_i, t)$ より $f(x_i - u\Delta t, t)$ を推定する方法は色々と考えられるが、ここでは、矢部¹⁾による Cubic-Interpolated pseudoparticle (CIP)法を用いる。CIP 法では、(5)式より x_{i-1} と x_i の間における Cubic Polynomial 内挿関数 $F(x)$ が用いられる。

$$F(X) = a_i X^3 + b_i X^2 + \frac{\partial f_i}{\partial x} X + f_i \quad (5)$$

$$\text{ただし、} X = -u_i \Delta t \quad (6)$$

通常を中心差分によって、Non-advection Phase の(2)式を求めてから、CIP 法による(5)式より波動方程式(3)を計算することにより、元の運動方程式(1)式の解が得られる。次に、上記の CIP 法を適用した 1次元自由水面流れの計算モデルの具体的な計算アルゴリズムについて述べる。理論解と比較するため、水路の底勾配及び摩擦抵抗を無視し、粘性項も働かないとし、1次元の流れ基礎式を次のように記述する：

$$\frac{H^{n+1} - H^n}{\Delta t} + \frac{\partial(h^n u^{n+1})}{\partial x} = 0 \quad (7)$$

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} + u^n \frac{\partial u^n}{\partial x} = -g \frac{\partial H^{n+1}}{\partial x} \quad (8)$$

ここに、 n は時間ステップで、 u, h, H はそれぞれ流速、水深、水位である。(7)式と(8)で H^{n+1} と u^{n+1} を求めるには未知変数として流速 u^{n+1} と水位 H^{n+1} が含まれている。本計算ではこれらの方程式を陰的に解くには SMAC 計算アルゴリズムを用いた。具体的に説明すると：

まず、第1段階では、式(8)を陽的な(9)式にして CIP 法より仮の流速 \hat{u} を導く。

$$\frac{\hat{u} - u^n}{\Delta t} + u^n \frac{\partial u^n}{\partial x} = -g \frac{\partial H^n}{\partial x} \quad (9)$$

次に、(10)式を用い u^{n+1} を \hat{u} と(11)式に定義した水位修正量 H' より表し、(7)式の連続方程式に代入して H' に関する方程式を求め。

$$u^{n+1} = \hat{u} - \Delta t \times g \frac{\partial H'}{\partial x} \quad (10)$$

$$H' = H^{n+1} - H^n \quad (11)$$

SOR 法によって H' に関する方程式を計算し、 H' を求める。

(10)式と(11)式より u^{n+1} と H^{n+1} を求める。

3. 計算例

(1) Dam-Break 計算

上流端 h_1 と下流端 h_0 の水深状況によって、段波のタイプ

は図 - 1 に示すような(a)と(b)との2種類に分けられる²⁾。(a)タイプは下流側の影響が $x < 0$ まで及ぼすが、(b)タイプは届かないのである。水路勾配、摩擦抵抗、及び粘性項が働かない理想的な条件では、理論上 $h_1/h_0 < 7.225$ である場合(a)タイプが発生し、逆の場合は(b)タイプが発生する。ここで、それぞれ(a)と(b)タイプに相当する2つの計算例について計算を行った。計算条件は表 - 1 に示す。10秒後の計算結果と理論値がそれぞれ図 - 2、3に示す。計算結果より、(a)タイプに対して理論値と計算値に違いは見られず、段波を正確に捉えていることが分かる。しかしながら、(b)タイプの場合、計算結果と理論値は一致せず、(a)タイプの解となっている。この原因は段波フロントの伝播速度が速くなると、(6)式では、 i 地点の局地流速 u_i から移流距離 X を正しく評価できなくなると考えられる。なお、 u_i の代わりに周りの平均流速 $u_{ave} = (u_{i+1} + u_{i-1})/2$ を用いる研究論文³⁾も発表されているが、著者の調べによると、この場合は、計算スキームは用いた Δt の大きさに計算結果が依存してしまう結果となってしまう。

(2) 跳水計算

単位幅流量=0.07971(m³/s)、下流端水深=0.1949m、粗度係数=0.01 との計算条件の下で1つの跳水の計算例について計算を行った。図 4にはその計算結果と実測値⁴⁾を示す。上流部では計算水位は実測水位より高く、即ち、計算流速は実測流速より小さくとなっている。これによって、跳水の位置は上流側になってしまい、実測値から離れてしまう。この原因も流速があまり速い場合は、(6)式では、 i 地点の局地流速 u_i より移流距離 X を正しく評価できなくなるためと考えられる。

4. まとめ

本研究ではCIP法を用い、段波及び跳水との不連続を伴う流れの解析を行い、理論値及び実測値と比較した。この結果、CIP法が極めて簡単でありながら、通常の計算手法より、計算の安定性がよく、不連続性の流れでも発散せず、計算できることが分かった。これはCIP法の魅力である。しかしながら、計算結果に示した通りに、不連続な流れを精度良く再現できると再現できない場合があり、今後如何にCIP法の適応範囲を正確把握し、適応範囲を広げるように本計算手法を改善するか課題として残されている。

参考文献：

- 1) T. Yabe, T. Aoki, G. Sakaguchi and etc.: Computers & Fluids Vol. 19, No.3/4, Pp421-431, 1991
- 2) 本間仁、安芸的一編：物部水理学、岩波書店、1962.
- 3) 中山恵介・佐藤圭洋・堀川康志：CIP法を用いた浅水流方程式の数値計算手法の開発、水工学論文集、第42巻、1998.
- 4) 崇田徳彦、清水康行、渡邊康玄：MacCormack法を用いた常・射流計算、開発土木研究所月報、NO.448、1990年

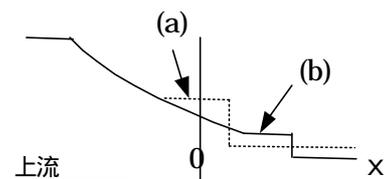


図 - 1

表 - 1 : 段波の計算条件

タイプ	上流端初期水位	下流端初期水位	粗度係数	水路長さ	計算格子間隔
(a)	2m	1m	0.0	100m	0.2m
(b)	0.8m	0.05m	0.0	100m	0.2m

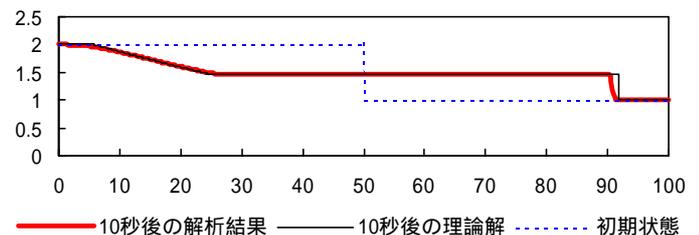


図 - 2

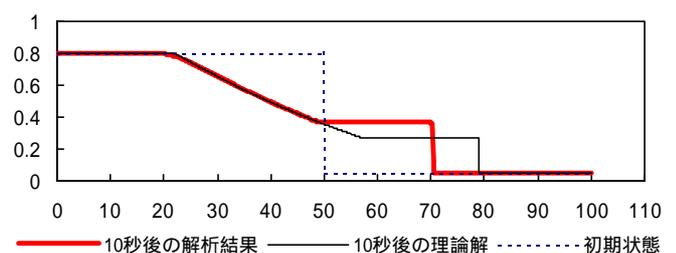


図 - 3

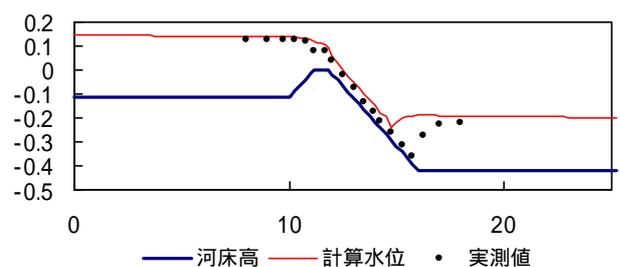


図 - 4