有限解析法の河川の移流分散への適用

京都大学防災研究所　正会員　戸田圭一
同　上　　　　　正会員　井上和也

1. 緒言：有限解析法（Finite Analytic Method，略して FAM）は Chen ら[1)]によって開発された数値解析手法の一つである．計算領域を数多くの有限な計算要素に分割し，各要素で成立する基礎方程式を各要素内で直接，解析的に解き，得られた解析解をもとに計算格子上の変数を求める方法である．基礎方程式が線形で容易に解析解が得られる場合はもちろんのこと，基礎方程式が非線形の場合でも，計算要素を小さくとり，非線形の方程式を線形の方程式に置き換え線形方程式の解析解を用いることにより数値解を求めることが可能となる．Chen ら[1)]は非線形の Navier-Stokes の方程式を解くにあたり，渦度方程式の式形を用い，定常状態の 2 次元の線形の移流拡散方程式を基に数値解を得る方法を提示している．よって基礎方程式が同種の式で表現される，河川，湖沼，海域の拡散現象への FAM の適用の可能性は大いに高いと考えられる．本報は，縦断方向に断面ならびに断面平均流速が変化する実河川の移流分散問題に FAM を適用し，従来の手法による結果との比較をとおして FAM の妥当性，有効性について若干の検討を行ったものである．

2. 有限解析法：以下に記すϕを変数，T, Uを定数とする 1 次元の線形の拡散方程式を考える．

$$U\frac{\partial \phi}{\partial t} + 2T\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \tag{1}$$

$-h \le x \le h, 0 \le t \le \tau$の領域を考え，**図-1** の白丸で示す 5 点（WC,EC, SW,SC, SE）でϕの値が既知であるとする．

初期条件$\phi(x,0)$ を指数関数と線形関数の結合形

$$\phi(x,0) = a_S\{\exp(2Tx) - 1\} + b_S x + c_S \tag{2}$$

また，境界条件$\phi(-h,t), \phi(h,t)$ を線形関数

$$\phi(-h,t) = a_W + b_W t \tag{3}$$

$$\phi(h,t) = a_E + b_E t \tag{4}$$

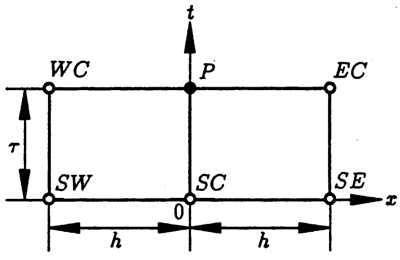

図-1 FAM の計算要素

で表現し，既知の 5 点を用いて (2) ～ (4) 式の各々の係数を定めた後，それらの条件下で (1) 式を解けば，解析解として$\phi_P = \phi(0,\tau)$ は以下のように表される[2)]．

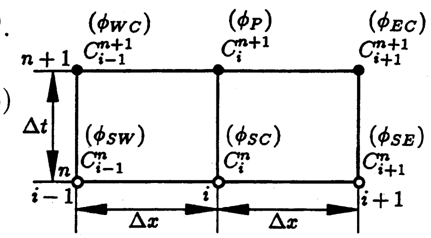

図-2 変数の対応関係

$$\phi_P = \phi(0,\tau) = G_{WC}\cdot\phi_{WC} + G_{EC}\cdot\phi_{EC} + G_{SW}\cdot\phi_{SW} + G_{SC}\cdot\phi_{SC} + G_{SE}\cdot\phi_{SE} \tag{5}$$

$$G_{WC} = \exp(Th)\{\beta_1 + \frac{Uh^2}{\tau}(\alpha - \beta_2)\}, \qquad G_{EC} = \exp(-2Th)G_{WC},$$

$$G_{SW} = \exp(Th)\{\frac{Uh^2}{\tau}(\beta_2 - \alpha) - 2Th\coth Th\cdot\alpha\},$$

$$G_{SC} = 4Th\cosh Th\coth Th\cdot\alpha, \qquad G_{SE} = \exp(-2Th)G_{SW},$$

$$\alpha = \sum_{m=1}^{\infty}\frac{-(-1)^m\lambda_m h\exp(-F_m\tau)}{\{(Th)^2 + (\lambda_m h)^2\}^2}, \quad \lambda_m = \frac{(2m-1)\pi}{2h}, \quad F_m = \frac{T^2 + \lambda_m^2}{U},$$

$$\beta_1 = \frac{1}{\exp(Th) + \exp(-Th)}, \quad \beta_2 = \frac{\exp(Th) - \exp(-Th)}{2Th\{\exp(Th) + \exp(-Th)\}^2}$$

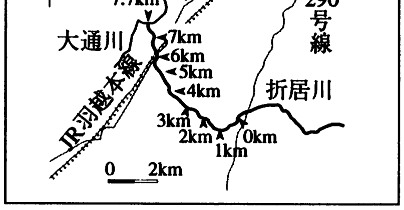

図-3 折居川平面図

一方，実河川の移流分散方程式は，

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u_1(x)\frac{\partial C}{\partial x} = D(x)\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}, \quad u_1(x) = u(x) - \frac{1}{A(x)}\frac{\partial}{\partial x}\{A(x)D(x)\} \tag{6}$$

数値解析，有限解析法，移流分散，実河川

〒611-0011 宇治市五ヶ庄　TEL 0774-38-4136　FAX 0774-38-4147

と表現される．ここに $C = C(x,t)$ は断面平均濃度，t は時間，x は流下方向の距離，$u(x)$ は断面平均流速，$A(x)$ は河道の断面積，$D(x)$ は移流分散係数である．対象区間を $0 \le x \le x_L$ とし，x を一様な計算区間 Δx に分割し，計算時間間隔を Δt とする．**図-2** に示すような x の計算格子点 $i-1, i, i+1$，t の計算格子点 $n, n+1$ から構成される計算要素を考える．ϕ を C におきかえ，τ, h をそれぞれ $\Delta t, \Delta x$ とみなし，また $T = u_1(x)/(2D(x)), U = 1/D(x)$ とおいたときの G の値を G^* で表すと，C_i^{n+1} は，

$$C_i^{n+1} = G^*_{WC} C_{i-1}^{n+1} + G^*_{EC} C_{i+1}^{n+1} + G^*_{SW} C_{i-1}^{n} + G^*_{SC} C_i^{n} + G^*_{SE} C_{i+1}^{n} \tag{7}$$

と表され，さらに上流端，下流端の境界条件を課せば，implicit な解法により $n+1$ の時刻の解を求めることができる．

3. 実河川への適用：対象とした河川は，新潟県下越地方を流れる阿賀野川水系折居川であり，大通川合流点から 7.7km 上流までを計算区間とし，上流端を x=0km，合流点の下流端を $x = x_L$=7.7km と設定した（**図-3** 参照）．計算区間の河床こう配は 1/200 ～ 1/1000 の範囲である．実河川では移流分散係数も流下に伴い変化すると考えられるが，ここでは河道長も短いことより，$D(x)$ は一定値として取り扱った．Q=10m^3/s 流下時を考え，計算断面を 50m 間隔に設定し，粗度係数 n=0.028 を用いた不等流計算により各断面の水深 d, u, 摩擦速度 u_*, 水面幅 B を算出した．対象区間の各断面値の単純平均値は，$\overline{d}$=0.61m, $\overline{u}$=0.87m/s, $\overline{u_*}$=0.09m/s, $\overline{B}$=24.8m である．これらの値を用いて Liu[3] の式により D=50.8m^2/s と定めた．テスト結果の一例を**図-4** に示す．初期条件 $C(x,0)$=0 で，上流端の境界条件を，

$$C(0,t) = \exp\{-\frac{a_0^2(t-t_0)^2}{2\sigma_0^2}\} \tag{8}$$

下流端の境界条件を $C(x_L,t)$=0 で与えた．ただし，a_0=1.25m/s, t_0=1000s, σ_0=264m である．また Δt=25s とした．FAM による結果との比較のため，移流式に 1 次の風上差分法および小松ら[4] の提案する six-point 法を，拡散式に完全 implicit の Crank-Nicholson 法を用いた split-operator 法による計算結果を参考結果として用いた．six-point 法の上流端近傍の濃度の取り扱いは小松ら[4] の方法に準じた．FAM の結果は，six-point 法を用いた split-operator 法の結果とよい一致を示している．これに対して風上差分法を用いた split-operator 法では，このケースが，拡散が移流と同様に分散に強く影響を及ぼし，移流計算の際に生じる数値拡散が顕在化しにくい場合であるにもかかわらず，ピーク値の減衰と波形の平坦化がみられる．またここでは示さなかったが，Δt=12.5s の場合は，クーラン数 ($Cr = u\Delta t/\Delta x$) が低下するため風上差分法では平坦化が一層進むが，FAM ではさらに six-point 法を用いた結果に一致してくる．従来の知見から精度が高いと言われている，移流式を six-point 法で評価する split-operator 法にきわめて近い結果が FAM からも得られたことより，FAM は実河川の移流分散の解析に十分適用可能であると考えられよう．

4. 結言：FAM は従来の手法の代替となり得るが，その利点は，split-operator 法を介さずに解が得られることと上流端の境界条件の組み込みが容易なことである．今後の課題の一つは適切な $\Delta t, \Delta x$ の選定指針の提示である．

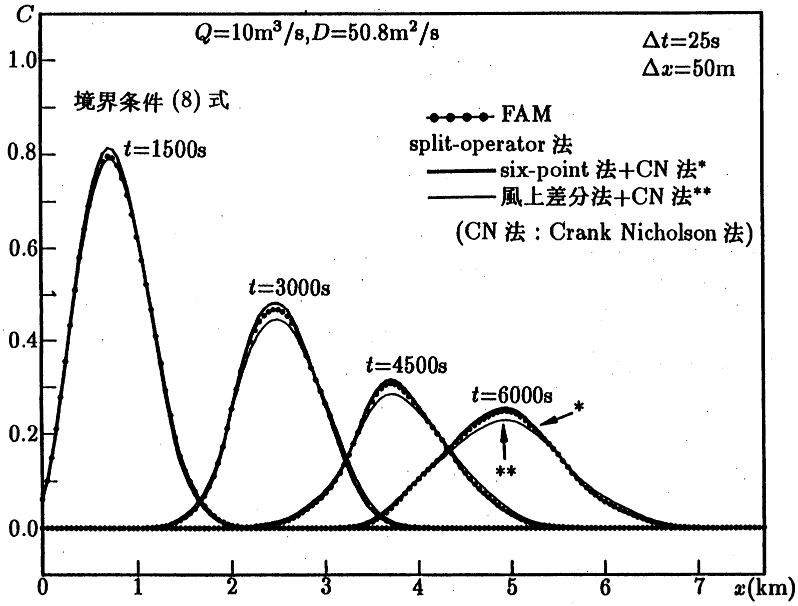

図-4 計算結果の比較

参考文献:

(1)C.J.Chen and H.C.Chen: Finite Analytic Numerical Method for Unsteady Two-Dimensional Navier-Stokes Equations, *J of Computational Physics*, 53,1984. (2)C.J. Chen and H.C. Chen: The Finite Analytic Method, Vol.IV, IIHR Report No. 232-IV, IIHR, Univ. of Iowa, Iowa, U.S.A., 1982. (3)Liu,H.: Predicting Dispersion Coefficient of Streams, *J. Environmental Division*, Proc. ASCE, Vol.103, No.EEl,1977. (4) 小松利光，仲敷憲和，大串浩一郎：河川や沿岸部における拡散物質の輸送拡散の計算法，第 31 回海岸工学講演会論文集，1984.