

海面や海底の動揺が生成する内部波の数値計算

東京大学大学院 学生会員 柿沼太郎
東京大学大学院 正会員 渡辺 晃

1. 序 論: 密度が異なる流体の境界面では、様々な原因によって内部波が発生し伝播する。本研究の内容は、非線形緩勾配方程式の内部波浪場への拡張と、内部波の数値計算とに大別される。まず、流体の各層で成り立つ非線形緩勾配方程式を導出する。得られた方程式系は、次のような特徴を有するであろう。

(1) 本方程式は、磯部 (1994) の非線形緩勾配方程式を内部波浪場に拡張したものであり、広周波数帯域に対して適用可能である。すなわち、方程式の適用に際して密度成層の層厚と波の条件の相互関係から制約を受けないため、浅海・深海の条件を問わず同一の方程式系を用いて解析できる。

(2) 方程式の導出過程において、灘岡・中川 (1992) の連成振動の概念を適用し、鉛直方向の積分を解析的に行なう。その際、磯部 (1994) にならい、各層の速度ポテンシャル ϕ_i の鉛直分布を有限個の鉛直分布関数 $Z_{i,\alpha}$ の重み付き重ね合わせとして、 $\phi_i(\mathbf{x}, z, t) = Z_{i,\alpha}(z; h_i(\mathbf{x})) f_{i,\alpha}(\mathbf{x}, t)$ のように表わす。 (1)

(3) 本モデル方程式は、2層問題のみならず、多層の場合も解析できるように一般化されている。

(4) 海底地形や最上面が時間的に変化する場合にも適用可能である。更に、最上層が空気と接し、表面波が生成する場合も取り扱える。このとき、表面波と内部波の両者の強非線形性・強分散性を考慮できる。

次に、特に (4) の特徴を利用して、海面や海底の動揺が生成する内部波の数値解析を試みる。近年、メガ・フロートのように大規模な浮体構造物の技術開発が進められている。こうした構造物を設置した場合、その動揺が流体運動と相互干渉し、水圏環境にも影響を及ぼすであろう。他方、地震時のような比較的急激な海底変動は、津波や内部波を発生させる。ここでは、非線形緩勾配方程式を非線形長波方程式に帰着させ、これら海面や海底の動揺を起因とする内部波を数値計算により再現する。

2. 内部波解析のための非線形緩勾配方程式の導出: 密度の異なる互いに混合しない非粘性・非圧縮性流体が成層状態にあるとする。流体の種類を上から順に $i = 1, 2, \dots, I$ で表わし、各流体の密度を $\rho_i = \text{const.}$ とする ($\rho_1 < \rho_2 < \dots < \rho_I$)。静水状態において各流体の占める水深が $h_i(\mathbf{x})$ で安定しており、そのときの最上面の位置を $z = 0$ とする。非回転運動を仮定し、第 i 層において成立する非線形緩勾配方程式を導く。

いま、第 i 層の下面位置 $\eta_{i,0}(\mathbf{x}, t)$ と上面における圧力 $p_{i-1}(\mathbf{x}, t)$ とがともに既知であるとする。すると、求める未知変数は、速度ポテンシャル ϕ_i 及び上面の位置 $\eta_{i,1}$ となる。このとき、 $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y)$ として、第 i 層における変分問題の汎関数を次式のように定義する。

$$S_i[\phi_i, \eta_{i,1}] = \int_{t_0}^{t_1} \iint_A \int_{\eta_{i,0}}^{\eta_{i,1}} \left\{ \frac{\partial \phi_i}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla \phi_i)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi_i}{\partial z} \right)^2 + gz + \frac{p_{i-1} + P_i}{\rho_i} \right\} dz dA dt \quad (2)$$

ここで、 g は、重力加速度である。また、 $P_i = \sum_{k=1}^{i-1} (\rho_i - \rho_k) g h_k$ は、各層毎に定まる定数である。

式 (1) を式 (2) に代入して鉛直積分を行なった後、変分原理の Euler の方程式を求める。すると、緩勾配近似のもとで、次式のような内部波のための非線形緩勾配方程式が得られる。

$$Z_{i,\alpha}^{\eta_{i,1}} \frac{\partial \eta_{i,1}}{\partial t} - Z_{i,\alpha}^{\eta_{i,0}} \frac{\partial \eta_{i,0}}{\partial t} + \nabla (A_{i,\alpha\beta} \nabla f_{i,\beta}) - B_{i,\alpha\beta} f_{i,\beta} + (C_{i,\beta\alpha} - C_{i,\alpha\beta}) \nabla f_{i,\beta} \nabla h_i \\ + \frac{\partial Z_{i,\beta}^{\eta_{i,1}}}{\partial h_i} Z_{i,\alpha}^{\eta_{i,1}} f_{i,\beta} \nabla \eta_{i,1} \nabla h_i - \frac{\partial Z_{i,\beta}^{\eta_{i,0}}}{\partial h_i} Z_{i,\alpha}^{\eta_{i,0}} f_{i,\beta} \nabla \eta_{i,0} \nabla h_i = 0 \quad (3)$$

$$Z_{i,\beta}^{\eta_{i,1}} \frac{\partial f_{i,\beta}}{\partial t} + g \eta_{i,1} + \frac{p_{i-1} + P_i}{\rho_i} + \frac{1}{2} Z_{i,\gamma}^{\eta_{i,1}} Z_{i,\beta}^{\eta_{i,1}} \nabla f_{i,\gamma} \nabla f_{i,\beta} \\ + \frac{1}{2} \frac{\partial Z_{i,\gamma}^{\eta_{i,1}}}{\partial z} \frac{\partial Z_{i,\beta}^{\eta_{i,1}}}{\partial z} f_{i,\gamma} f_{i,\beta} + \frac{\partial Z_{i,\gamma}^{\eta_{i,1}}}{\partial h_i} Z_{i,\beta}^{\eta_{i,1}} f_{i,\gamma} \nabla f_{i,\beta} \nabla h_i = 0 \quad (4)$$

ここで、 $A_{i,\alpha\beta}$, $B_{i,\alpha\beta}$, $C_{i,\alpha\beta}$, $Z_{i,\alpha}^{\eta_i}$ 及び $\partial Z_{i,\beta}^{\eta_i}/\partial z$ は、各層毎に磯部 (1994) と同様に定義される。第 i 層の上面及び下面の位置 $z = \eta_{i,1}(\mathbf{x}, t)$ 及び $z = \eta_{i,0}(\mathbf{x}, t)$ が表面波形、内部波形または海底地形のいずれかを表わす。

3. 内部波の数値計算: 図 1 のような $h_i = \text{const.}$ である 2 層密度流問題を対象とする。最上面、内部境界面及び海底面の位置をそれぞれ $z = \zeta$, $z = \eta$ 及び $z = b$ とし、これら境界面における摩擦を考えない。

3.1 長波近似: いま、簡単のために、各層の速度ポテンシャルを $\phi_i = Z_{i,\alpha} \cdot f_{i,\alpha} = 1 \cdot f_{i,1} = f_i$ のようにそれぞれ 1 項のみを用いて表わす。すると、式 (3) 及び (4) より、次式のような非線形長波方程式が得られる。

$$\text{第1層: } \partial\eta/\partial t = \partial\zeta/\partial t + \nabla\{(\zeta - \eta)\nabla f_1\} \quad (5), \quad \partial f_1/\partial t = -\{g\zeta + p_0/\rho_1 + (\nabla f_1)^2/2\} \quad (6)$$

$$\text{第2層: } \partial\eta/\partial t = \partial b/\partial t - \nabla\{(\eta - b)\nabla f_2\} \quad (7), \quad \partial f_2/\partial t = -\{g\eta + (p_1 + P_2)/\rho_2 + (\nabla f_2)^2/2\} \quad (8)$$

ここで、 $P_2 = (\rho_2 - \rho_1)gh_1$ である。式 (7) を式 (5) に代入して次式を得る。

$$\partial\zeta/\partial t = \partial b/\partial t - \{\nabla[(\zeta - \eta)\nabla f_1] + \nabla[(\eta - b)\nabla f_2]\} \quad (9)$$

ところで、第1層において式 (4) の z に関する積分の向きを逆にすると、次式の補助方程式が得られる。

$$\partial f_1/\partial t + g\eta + p_1/\rho_1 + (\nabla f_1)^2/2 = 0 \quad (10)$$

式 (10) は、 $z = \eta$ 上で成り立つ Bernoulli の式に相当する。式 (10) に式 (6) を代入する。

$$p_1 = p_0 + \rho_1 g(\zeta - \eta) \quad (11)$$

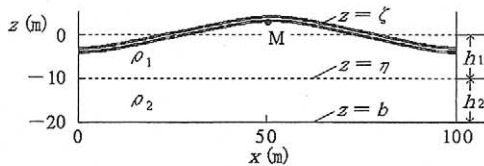
式 (11) は、静水圧分布を表わす。式 (11) を式 (8) に代入して、次式を得る。

$$\partial f_2/\partial t = -\{g\eta + p_0/\rho_2 + r^{-1}g(\zeta - \eta) + (1 - r^{-1})gh_1 + (\nabla f_2)^2/2\} \quad (12)$$

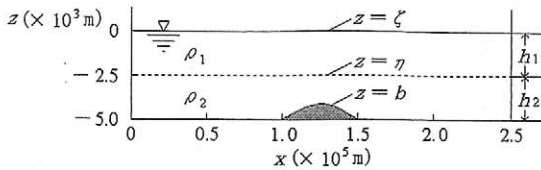
ここで、 $r = \rho_2/\rho_1 > 1$ である。また、式 (8), (10) より p_1 を消去して次式を得る。

$$\partial f_1/\partial t - r\partial f_2/\partial t = (r - 1)g(\eta + h_1) - \{(\nabla f_1)^2 - r(\nabla f_2)^2\}/2 \quad (13)$$

ここでは、前進差分を用いて陽解法で解く。 p_0 が既知で ζ が与えられない場合 (A) と、 p_0 が未知で ζ が与えられる場合 (B) とに場合分けした図2の手順を繰り返して、新しい時間ステップの値を次々に求める。



(a) 浮体構造物の振動



(b) 海底の隆起

図1: 2層モデル

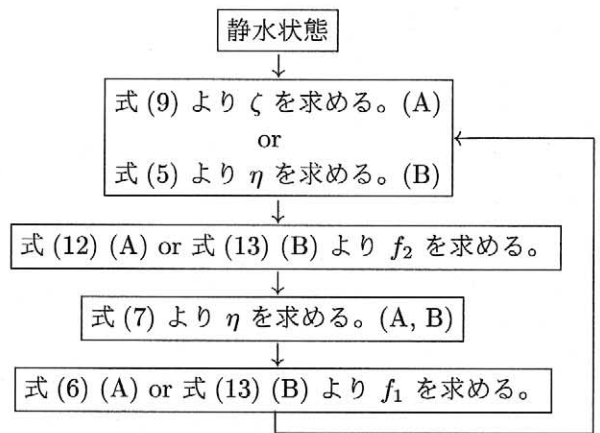


図2: 計算の手順

3.2 海面の動揺: 図1(a)において、重さが0の浮体構造物が海面と接しており、 $\zeta = 2 \sin(0.2\pi t) \cos(0.02\pi x)$ となるように振動する。ここで、距離及び時間の単位は、それぞれ、m 及び s である。側方は、完全反射の固定壁とする。 $r = \rho_2/\rho_1 = 1.025$ とするとき、図3のような内部波が発生する。これは、図2の (B) の手順により求めたものである。また、海面上の点 M における圧力 p_M の時間変化を図4に示す。

3.3 海底の動揺: 図1(b)において、海底の $1.0 \times 10^5 < x < 1.5 \times 10^5$ の部分が $b = 0.15t \sin \pi\{x/(0.5 \times 10^5) - 1\}$ という形状で時間 t とともに隆起し、 $t = 20s$ で地形変化が停止する。 $r = 1.025$ であるとき、図5のような表面波及び内部波が伝播する。これは、大気圧を $p_0 = 0$ として、図2の (A) の手順により求めたものである。

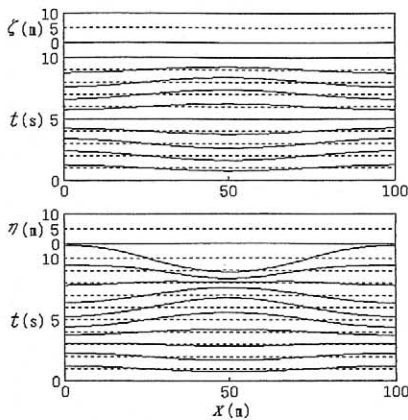


図3: 海面振動による内部波

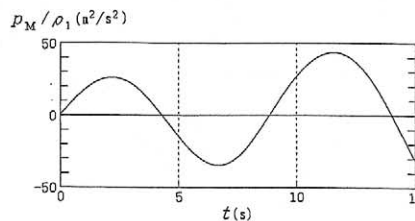


図4: 点 M における圧力

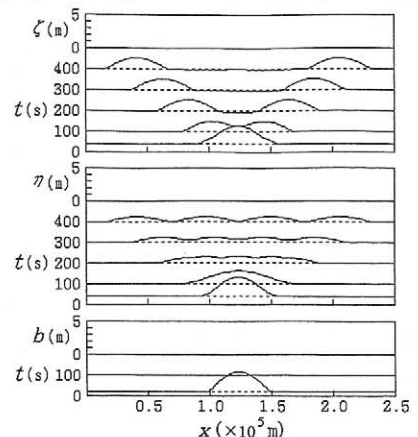


図5: 海底隆起による表面波と内部波

4. 結 論: 非線形緩勾配方程式を内部波と表面波が共存する波・流れ場の方程式に拡張した。方程式系を非線形長波方程式に帰着させ、海面または海底の動揺によって生じる内部波や表面波の数値解析を行なった。

参考文献: 磯部雅彦 (1994), 土木学会論文集, No. 491/(II)-27, pp. 1-14.; 灘岡和夫・中川康之 (1993), 海岸工学論文集, 第40巻, pp. 6-10.