

はじめに

今まで筆者らは近似理論である Timoshenko はりの運動方程式を、断面諸量などを周波数の関数とすることで、厳密解に一致させる試みをしてきた。しかし、それは位相速度曲線の分布を合わせるという数値的配慮のみであり、理論的裏づけはなかった。そこで本研究では、厳密解である Lamb 板の弾性理論より Timoshenko はり形の運動方程式を導く事により、動的状況下における断面諸量と周波数の関係を調べた。

理論

Lamb 板の理論で扱う無限長の板の厳密な変位場より、動的はりの運動が静止した時点 ($\bar{\gamma} = 0$) で従来ある静的な基底関数に一致するように変位関数を以下のごとくおいた。

$$\left. \begin{aligned} u(x, z, \bar{\gamma}) &= -\mathcal{Z}(z, \bar{\gamma})\psi(x, \bar{\gamma}) \\ w(x, z, \bar{\gamma}) &= \mathcal{I}(z, \bar{\gamma})W(x, \bar{\gamma}) \end{aligned} \right\} \dots (1)$$

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{Z}(z, \bar{\gamma}) &= \frac{h}{2} \frac{2}{1 - \nu_2^2} \left(\frac{\sinh k\nu_1 z}{\sinh k\nu_1 h/2} - \frac{1 + \nu_2^2}{2} \frac{\sinh k\nu_2 z}{\sinh k\nu_2 h/2} \right) \\ \mathcal{I}(z, \bar{\gamma}) &= \frac{1 + \nu_2^2}{1 - \nu_2^2} \left(\frac{\cosh k\nu_1 z}{\cosh k\nu_1 h/2} - \frac{2}{1 + \nu_2^2} \frac{\cosh k\nu_2 z}{\cosh k\nu_2 h/2} \right) \end{aligned} \right\} \dots (2)$$

これらの式は完全な変数分離形ではないが、周波数のみを独立変数とする任意の関数を掛けることにより自由に正規化できる。ここでは式 (2) のように基底関数を設定した。これらより周波数の変化にともなう基底関数の変化の様子 (図 1) を図示した。軸方向反り変位の静的基底関数は梁の高さ方向の 1 次関数 $\mathcal{Z}(z, \bar{\gamma}) = z$ であり、振動数の増加にともないじょじょに中立軸付近から減衰してゆく。たわみ変位の静的基底関数は梁の高さ方向に一定値をとる定数関数 $\mathcal{I}(z, \bar{\gamma}) = 1$ であり、振動数の増加にともないじょじょに中立軸付近から減衰してゆく。そして、周波数無限大において、水平および鉛直変位の合成は Rayleigh 表面波状態となる事がわかる。次に、この厳密な変位場よりはりの運動方程式 (3) を導き、振動特性を調べるための変位波形を仮定することにより位相速度曲線群 (図 2) を得た。Lamb 板理論の位相速度曲線と比較すると、高次モードまで完全に一致している。

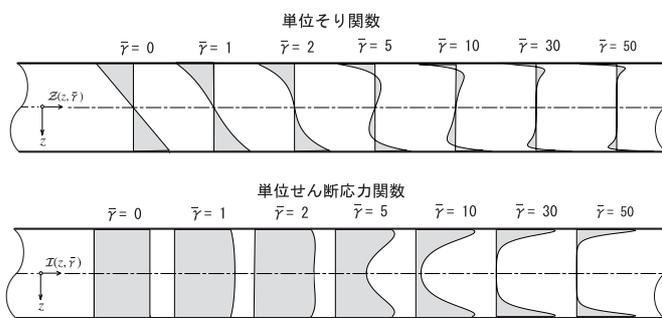


図 1 基底関数の分布状況

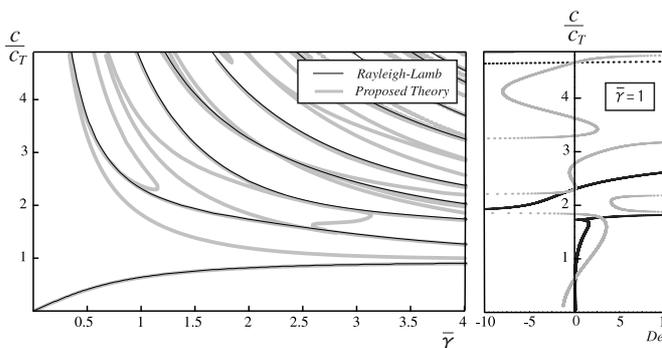


図 2 長方形梁の位相速度曲線

$$\left. \begin{aligned} \left[GA^* \left(k_0 \frac{\partial W}{\partial x} - k_1 \psi \right) \right]' - \left[\frac{(1 - \nu)E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} H^* W' - \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} B^* \psi' \right] + \int_A p_z \mathcal{I} dA - \rho A^* (\bar{\gamma}) \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} &= 0 \\ \left[\frac{(1 - \nu)E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} I^* \psi' - \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} B^* W \right]' + \left[GA^* \left(k_1 \frac{\partial W}{\partial x} - k_2 \psi \right) \right] - \int_A p_x \mathcal{Z} dA - \rho I^* (\bar{\gamma}) \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots (3)$$

Key Words : Lamb plate, Rayleigh-Lamb equation, Timoshenko beams, radius of gyration of area, Rayleigh surface waves, phase velocity curves

連絡先 : 〒 278-8510 千葉県野田市山崎 2641 :0471-24-1501(内線 4062)

また第1次モードをあらわす一番下の線は周波数無限大において Rayleigh 表面波速度に収束している。ただし、本理論には余計な灰色線が存在する。

はり、板などの構造形状に無関係に、高周波領域で媒質を伝わる位相速度の第1次モードは Rayleigh 表面波に近づくことから、半無限体であるにもかかわらず、Rayleigh 表面波の動的断面2次半径 r^* なる概念を提案できる。ここにその定義式 (4) を示す。動的な断面積 A^* 、断面2次モーメント I^* 、および断面2次半径 r^* と周波数の関係 (図3) を示すと、第1次モードの場合 (図3-a)、どの量も大きさ1から傾き0の曲線で出発し、周波数の増加とともにじょじょに減少してゆく。動的断面2次半径および断面積は等しく零に漸近するが、それらの比である動的断面2次半径は $0/0$ の不定形となるが、次のごとく有限値に収束する。

$$\lim_{\bar{\gamma} \rightarrow \infty} \frac{r^{*2}(\bar{\gamma})}{r^2} =$$

$$3 \frac{4\bar{\nu}_2(\bar{\nu}_1 + \bar{\nu}_2) - 8\bar{\nu}_1\bar{\nu}_2(1 + \bar{\nu}_2^2) + \bar{\nu}_1(\bar{\nu}_1 + \bar{\nu}_2)(1 + \bar{\nu}_2^2)^2}{4\bar{\nu}_1(\bar{\nu}_1 + \bar{\nu}_2) - 8\bar{\nu}_1\bar{\nu}_2(1 + \bar{\nu}_2^2) + \bar{\nu}_2(\bar{\nu}_1 + \bar{\nu}_2)(1 + \bar{\nu}_2^2)^2}$$

たとえば $\nu = 1/4$ となる Poisson 材料においては

$$\lim_{\bar{\gamma} \rightarrow \infty} \frac{r^*(\bar{\gamma})}{r} = \sqrt{-3 + 2\sqrt{3}} \simeq 0.681250$$

となる。これらより動的断面2次半径は周波数の増加とともに減少し、最終的には静的場合の7割弱に低下することがわかる。第2次以上のモードも同様の方法で断面諸量を計算できる。例として第2次モードの場合 (図3-b) を示す。位相速度の第2次以上のモードの断面2次半径は周波数無限大において零となることも確認した。これは、周波数無限大において、はりまたは板の表面に Rayleigh 波のみ残り、媒質の横波速度に収束する第2次以上の位相速度曲線群が最終的に消失する事実に対応している。

なお、はりの軸方向反りの基底関数 Z は $\bar{\gamma} = \pi$ において分母が零になるため、そこで動的断面2次モーメント及び動的断面2次モーメントは無限大となるが、この位置で軸方向関数 ψ は零に向かうため、軸方向変位 $u(= -Z \times \psi)$ 自体は穏やかに変化し特異性を示すことはない。

まとめ

(1) 第1次モードにおいて、動的断面2次モーメントと動的断面積は周波数無限大において、零に漸近する。しかし、それらの比の平方である動的断面2次半径は静的その7割弱ほどの一定値に収束する。そして、位相速度は周波数無限大において Rayleigh 表面波の伝播速度に収束する。

(2) 第2次以上の高次モードでは、周波数無限大において動的断面2次モーメントは零以外の一定値に収束するが、動的断面積は無限大に発散する。その結果、それらの比の平方である動的断面2次半径は零に漸近し、はりの実体を失う。

(3) これらより、高周波領域において、はり、板、地盤のいかにかわらず、Rayleigh 表面波のみ支配する真の物理現象を確認できる。

$$\left. \begin{aligned} I^*(\bar{\gamma}) &= \int_A Z(z, \bar{\gamma}) Z(z, \bar{\gamma}) dA \\ A^*(\bar{\gamma}) &= \int_A I(z, \bar{\gamma}) I(z, \bar{\gamma}) dA \\ r^{*2}(\bar{\gamma}) &= \frac{I^*(\bar{\gamma})}{A^*(\bar{\gamma})} \end{aligned} \right\} \dots (4)$$

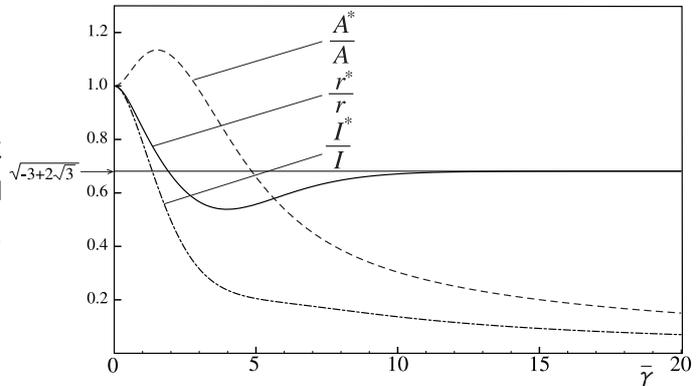


図3-a 第1次モードの場合

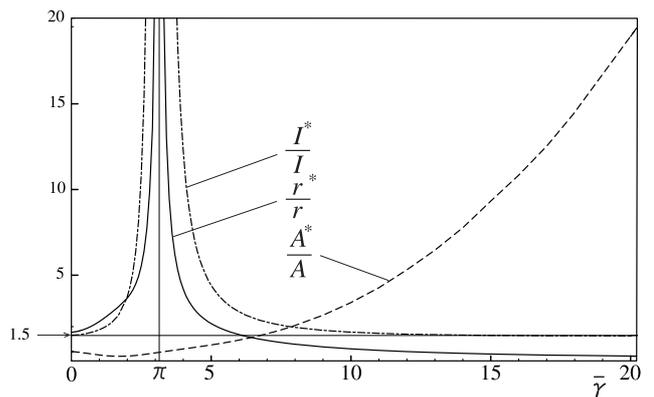


図3-b 第2次モードの場合

図3 断面諸量と周波数の関係