自由振動問題における水中浮遊式トンネルと弾性床上梁の等価性について

北海道大学大学院工学研究科　学生員　佐藤 太裕
北海道大学大学院工学研究科　フェロー　三上　隆

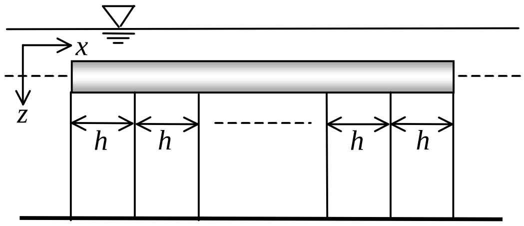
１．はじめに

本研究は軸方向に係留索を等間隔に配置した水中浮遊式トンネルを弾性支承上梁とみなした場合において，自由振動時に等価な弾性床上梁と考えることができる条件についての検討を行うことを目的としている．具体的には，慣性力によるパラメータを含んだ弾性支承上梁の差分方程式と，それと等価な弾性床上梁の微分方程式より求められるそれぞれの特性解を比較することにより，両者の近似性を調べることとする．

２．弾性床上梁の微分方程式とその特性解

最初に地盤反力係数 k'，曲げ剛性 EI の弾性床上梁の曲げ自由振動を考える．分布荷重としての慣性力を考慮した支配方程式は次式となる．

$$\frac{\gamma A}{g}\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2}+EI\frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4}+k'w(x,t)=0$$



図－１　解析モデル

ここで γ は単位体積重量，A は梁の断面積，g は重力加速度，w は変位である．自由振動を

$$w(x,t)=W(x)(A_1\sin\omega t+A_2\cos\omega t)$$

と表し，これを支配方程式に代入すると，次の関数 $W(x)$に関する方程式が求められる．

$$EI\frac{d^4W(x)}{dx^4}+(k'-m\omega^2)W(x)=0 \qquad (m=\frac{\gamma A}{g})$$

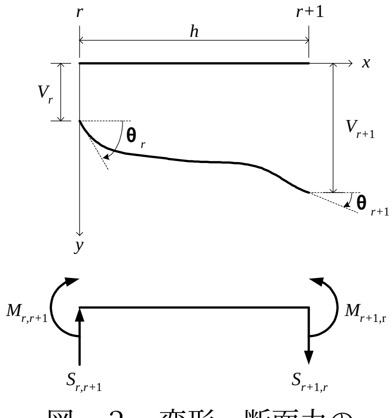
このとき特性解 λ_C と $W(x)$はそれぞれ以下のように表される．

$$\lambda_C=\pm\beta,\ \pm\beta i\quad（\beta=\sqrt[4]{\frac{m\omega^2-k'}{EI}}(=\frac{1}{h}\sqrt[4]{24(K_C-K)})）,\ W(x)=C_5\cos\beta x+C_6\sin\beta x+C_7\cosh\beta x+C_8\sinh\beta x$$

３．弾性支承上梁の差分方程式とその特性解

次に**２．**と同様にして弾性支承上梁について考える．弾性床上梁の場合と同様に変数分離を行う．このとき隣接する弾性支承上の２点 r，$r+1$ における自由振動時の変形と断面力の関係として次式が成り立つ．

$$\begin{Bmatrix} S_{r,r+1}h \\ S_{r+1,r}h \\ M_{r,r+1} \\ M_{r+1,r} \end{Bmatrix}=\frac{EI}{h}\begin{bmatrix} -12c_5 & 12c_6 & -6c_3 & -6c_4 \\ -12c_6 & 12c_5 & -6c_4 & -6c_3 \\ 6c_3 & -6c_4 & 4c_1 & 2c_2 \\ -6c_4 & 6c_3 & -2c_2 & -4c_1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} V_r/h \\ V_{r+1}/h \\ \theta_r \\ \theta_{r+1} \end{Bmatrix}$$



図－２　変形，断面力の正の向き

ここで

$$c_1=\frac{sC-cS}{4(1-cC)}ah,\ c_2=\frac{S-s}{2(1-cC)}ah,\ c_3=\frac{sS}{6(1-cC)}(ah)^2,\ c_4=\frac{C-c}{6(1-cC)}(ah)^2,$$

$$c_5=\frac{sC+cS}{12(1-cC)}(ah)^3,\ c_6=\frac{S+s}{12(1-cC)}(ah)^3,\ ah=\sqrt[4]{\frac{m\omega_D^2h^4}{EI}}(=\sqrt[4]{24K_D})$$

$$s=\sin ah,\ c=\cos ah,\ S=\sinh ah,\ C=\cosh ah$$

また弾性支承の鉛直方向ばね定数を k としたとき，r 点における力のつり合い式として次の２式が成り立つ．

キーワード：水中浮遊式トンネル，弾性支承上梁，弾性床上梁，特性解
連絡先：〒060-8628　札幌市北区北 13 条西８丁目　TEL.011-706-6176　FAX.011-726-2296

$$S_{r,r+1}-S_{r,r-1}=kV_r,\quad M_{r,r+1}-M_{r,r-1}=0$$

以上より差分方程式として次式が得られる．

$$\{\frac{3c_4^2(\mathbf{E}-\mathbf{E}^{-1})^2}{c_2(\mathbf{E}+\mathbf{E}^{-1})+4c_1}-2c_6(\mathbf{E}+\mathbf{E}^{-1})+4(c_5+K)\}V_r=0$$

$$K=\frac{kh^3}{24EI},\ \mathbf{E}:\text{移動演算子}$$

この差分方程式の特性方程式は最終的に次の $\cosh\lambda_D$ に関する２次方程式となる．

$$(3c_4^2-2c_2c_6)\cosh^2\lambda_D+\{2c_2(c_5+K)-4c_1c_6\}\cosh\lambda_D+4c_1(c_5+K)-3c_4^2=0$$

このとき特性解 λ_D と V_r はそれぞれ以下のように表される．

$$\lambda_D=\pm\alpha_1,\pm\alpha_2 i$$

$$V_r=B_1\sin\alpha_2 r+B_2\cos\alpha_2 r+B_3\sinh\alpha_1 r+B_4\cosh\alpha_1 r$$

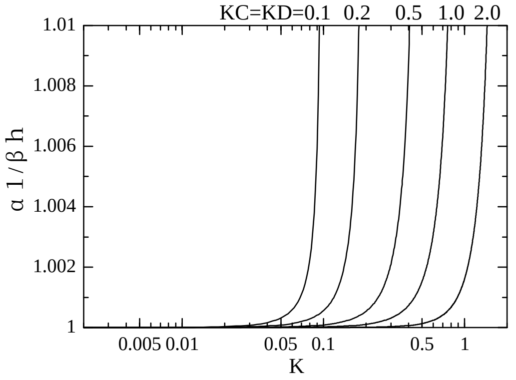
４．等価な弾性床上梁に対する判定条件

支承間隔 h の弾性支承上梁と等価な弾性床上梁について，地盤係数に相当するものを $k'=k/h$ とし，また座標について $x=rh$ であることを考慮に入れると，動的問題において弾性支承上梁を弾性床上梁とみなすことができる条件は両者の特性解と固有振動数に関するパラメータについて以下のようになる．

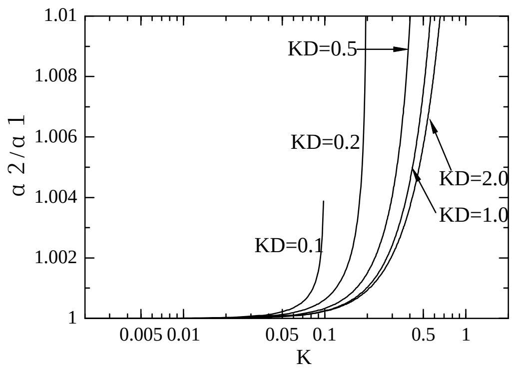
$$\alpha_1\cong\alpha_2\cong\beta h(=\sqrt[4]{24(K_C-K)}),\quad K_D\cong K_C$$

５．計算結果と考察

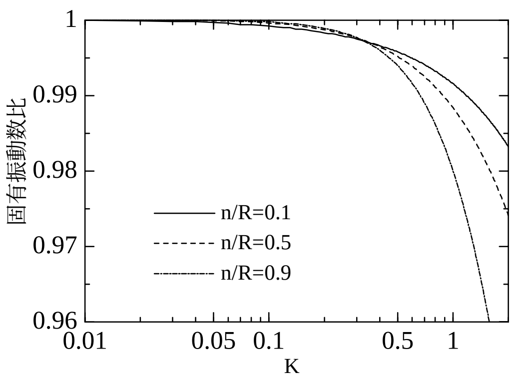
図－３，４はそれぞれ K に対する $\alpha_1/\beta h$，α_2/α_1 の変化を示したものである．これらの図より K の増加により特性解の比に変化がみられることがわかる．特に図－４について $K<0.05$ ではいずれの K_D についても $\alpha_2/\alpha_1\cong1.0$ となり $K=0.05$ を境に大きな変化がみられる．この値は弾性床上梁についてはいずれの K_C についても１となるから，この $K<0.05$ が両者を等価とみなすことができる範囲であると考えられ，このことは静的な問題に関する検討結果[1)]とほぼ一致する．図－５は実際の両端単純支持梁について K_D/K_C を求めたグラフである．この図からも等価性を示す前述の議論の正当性を確認することができる．



図－３　K に対する特性解の比の変化
（弾性支承上梁，弾性床上梁）



図－４　K に対する特性解の比の変化
（弾性支承上梁）



図－５　単純支持梁における固有振動数比
（縦軸：$\sqrt[4]{K_D/K_C}$）
n：振動の次数　R：径間数

６．まとめ

本研究では水中浮遊式トンネルの自由振動時において弾性床上梁と等価である条件についての検討を行った．その結果，両者の等価性については静的解析と同様に $K=kh^3/24EI$ が支配パラメータとなり，慣性力に関するパラメータ K_C，K_D によらずおよそ $K<0.05$ の範囲で等価な弾性床上梁とみなすことができることが特性解の性質からわかった．今後はさらに波浪応答特性についての検討を行いたいと考えている．

【参考文献】

１）Ellington, J.P. : The beam on discrete elastic supports, Bull.I.R.C.A.,Vol.34, No.12, pp.933-941,1957.