三つの構造物の相互連結による減衰性能の向上手法について

山口大学大学院　学生員　森　桂一　山口大学　フェロー　會田忠義
山口大学　正員　麻生稔彦

１．まえがき　隣接する二つの構造物を連結部材（ばね・ダンパーから構成される部材）で相互に連結することにより，両構造物の減衰性能を向上させるための最適な連結方法を著者らは文献 1 で明らかにしてきたが，本研究は，さらに二つの構造物の相互連結の考え方を拡張して，三つの構造系の相互連結による減衰性能向上のための連結部材の調整手法を提示するのもである.解析調査手順は文献 1)のそれと同じである.

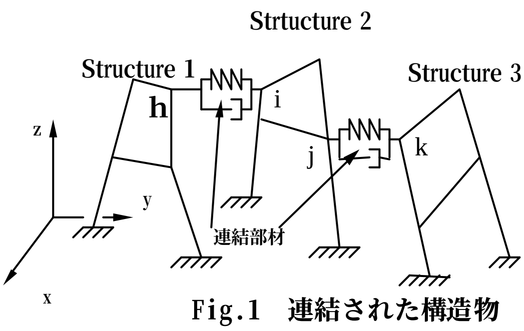

Fig.1　連結された構造物

2. 相互連結された構造物の運動方程式とモード方程式

（運動方程式）　Fig.1 に示した構造物１はＬ自由度，構造物２はＭ自由度，構造物３はＮ自由度とし，構造物１のｈ節点と構造物２のｉ節点で，さらに構造物２のｊ節点と構造物３のｋ節点と連結されているとする．構造物１のｈ節点と構造物２のｉ節点を結ぶ連結部材を連結部材１とし，構造物２のｊ節点と構造物３のｋ節点を結ぶ連結部材を連結部材２とする．ここで連結部材１の方向余弦を(l_1, m_1, n_1)とし，連結部材２の方向余弦を(l_2, m_2, n_2)するとき，運動方程式は次式で表される.

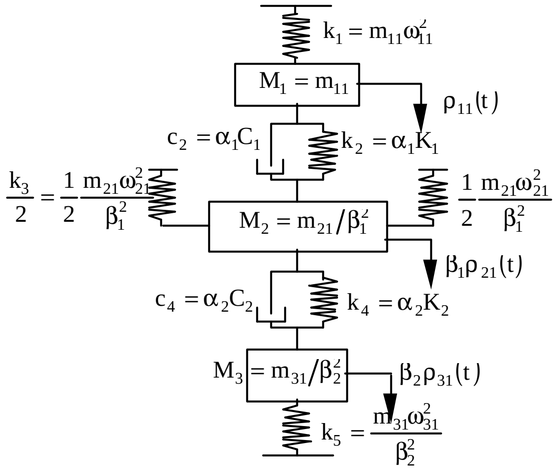

Fig.2　モード座標系における３自由度系

構造物１： $M_1\ddot{d}_1 + K_1 d_1 + K_1(H_1 d_1 - H_2 d_2) + C_1(H_1\dot{d}_1 - H_2\dot{d}_2) = 0$ (1)

構造物２：
$$M_2\ddot{d}_2 + K_2 d_2 + K_1(H_3 d_2 - H_4 d_1) + C_1(H_3\dot{d}_2 - H_4\dot{d}_1) + K_2(H_5 d_2 - H_6 d_1) + C_2(H_5\dot{d}_2 - H_6\dot{d}_1) = 0 \quad (2)$$

構造物３： $M_3\ddot{d}_3 + K_3 d_3 + K_2(H_7 d_3 - H_8 d_2) + C_2(H_7\dot{d}_3 - H_8\dot{d}_2) = 0$ (3)

ここで，$\mathbf{M}_1$，$\mathbf{M}_2$，$\mathbf{M}_3$：構造物１，２および３の質量マトリックス，$\mathbf{K}_1$，$\mathbf{K}_2$，$\mathbf{K}_3$：構造物１，２および３の剛性マトリックス,$\mathbf{d}_1$，$\mathbf{d}_2$,$\mathbf{d}_3$:構造物１,２および３の変位ベクトル,$\mathbf{H}_1$，$\mathbf{H}_2$,，$\mathbf{H}_3$，$\mathbf{H}_4$，$\mathbf{H}_5$，$\mathbf{H}_6$,，$\mathbf{H}_7$，$\mathbf{H}_8$：二つの構造物間で連結される節点を示すマトリックスで，$\mathbf{H}_1$はＬ×Ｌ，$\mathbf{H}_2$はＬ×Ｍ，$\mathbf{H}_3$はＭ×Ｍ，$\mathbf{H}_4$はＭ×Ｌ，$\mathbf{H}_5$はＭ×Ｍ，$\mathbf{H}_6$はＭ×Ｎ，$\mathbf{H}_7$はＮ×Ｎ，$\mathbf{H}_8$はＮ×Ｍ 要素で構成される．K_1，C_1：連結部材１のばね係数と減衰係数．K_2，C_2：連結部材 2 のばね係数と減衰係数である.

（モード方程式）　モード方程式を導くにあたって，連結部材の剛性は小さく，三つの構造物を連結した場合においても，連結された構造物の固有モードはそれぞれの構造物単独時の固有モードと類似していると想定した．また,連結部材が装着される位置での自由振動変位中，１次モードの占める割合が十分に大きいものとする．　今，構造物１について，1 次モードの固有円振動数をω_{11}，固有ベクトルをϕ_{11}で表し，構造物２について，1 次モードの固有円振動数をω_{21}，固有ベクトルをϕ_{21}で表し，さらに構造物3 について，1 次モードの固有円振動数をω_{31},固有ベクトルをϕ_{31}で表す．このとき,構造物１，２および 3 が相互に連結された状態の振動変位を，各構造物が単独の場合の固有ベクトルを用いて次のように表す．式中，ρ_{11}，ρ_{21}，ρ_{31}は時間の未知関数である.

$d_1 = \phi_{11}\rho_{11}(t)$，　$d_2 = \phi_{21}\rho_{21}(t)$，　$d_3 = \phi_{31}\rho_{31}(t)$　(3)　それぞれの構造物について，固有ベクトルの直交条件および固有円振動数と固有ベクトルとの関係を用いて，運動方程式を整理すると，それぞれ下記のモード方程式が得られる.

$$M_{11}\ddot{\rho}_{11} + \omega_{11}^2 M_{11}\rho_{11} + \alpha_1 C_1(\dot{\rho}_{11} - \beta_1\dot{\rho}_{21}) + \alpha_1 K_1(\rho_{11} - \beta_1\rho_{21}) = 0$$

1 2 0

$$\frac{M_{21}}{\beta_1^2}(\beta_1\ddot{\rho}_{21}) + \frac{\omega_{21}^2 M_{21}}{\beta_1^2}(\beta_1\rho_{21}) + \alpha_1 C_1(\beta_1\dot{\rho}_{21} - \dot{\rho}_{11}) + \alpha_1 K_1(\beta_1\rho_{21} - \rho_{11}) + \alpha_2 C_2(\beta_1\dot{\rho}_{21} - \beta_2\dot{\rho}_{31}) + \alpha_2 K_2(\beta_1\rho_{21} - \beta_2\rho_{31}) = 0$$

$$\frac{M_{31}}{\beta_2^2}(\beta_2\ddot{\rho}_{31}) + \frac{\omega_{31}^2 M_{31}}{\beta_2^2}(\beta_2\rho_{31}) + \alpha_2 C_2(\beta_2\dot{\rho}_{31} - \beta_1\dot{\rho}_{21}) + \alpha_2 K_2(\beta_2\rho_{31} - \beta_1\rho_{21}) = 0 \quad (4)$$

キーワード：構造振動，構造減衰，構造制御，相互連結

連絡先：〒755-8611　宇部市常盤台 2-16-1　山口大学工学部　Tel:0836-35-9436 Fax:0836-35-9429

$$\alpha_1 = {}_1D^2_{1h1}, \beta_1 = {}_1D_{2i1}/{}_1D_{1h1}, \alpha_2 = {}_1D^2_{1h1}\cdot{}_2D^2_{2j1}/{}_1D^2_{2i1}, \beta_2 = ({}_1D_{2i1}\cdot{}_2D_{3k1})/({}_1D_{1h1}\cdot{}_2D_{2j1})$$
$${}_1D_{1h1} = l_1U_{1h1} + m_1V_{1h1} + n_1W_{1h1}, {}_2D_{2j1} = l_2U_{2j1} + m_2V_{2j1} + n_2W_{2j1} \quad (5)$$
$${}_1D_{2i1} = l_1U_{2i1} + m_1V_{2i1} + n_1W_{2i1}, {}_2D_{3k1} = l_2U_{3k1} + m_2V_{3k1} + n_2W_{3k1}$$

式(5)中,M_{11}, M_{21} および M_{31} はそれぞれの構造物１, ２および３の１次の一般化質量であり，($U_{1h1}, V_{1h1}, W_{1h1}$)，($U_{2i1}, V_{2i1}, W_{2i1}$)，($U_{2j1}, V_{2j1}, W_{2j1}$) および ($U_{3k1}, V_{3k1}, W_{3k1}$)はそれぞれ構造物１の１次モードの h 節点の，構造物２の i 節点の，構造物２の j 節点の，構造物３の k 節点の x，y および z 方向変位である．式(4)は Fig.2 に示す３自由度系のモデルの運動方程式に対応する．

3．連結要素および連結部材の調整条件　**(3 質量 4 ばねを有する 3 自由度系における連結要素)**　式(4)で表わされる３自由度系の固有円振動数 ω_1, ω_2, ω_3 およびモード減衰比 ξ_1, ξ_2, ξ_3 は，図中の連結ばねのばね係数 $k_2(=\alpha_1K_1)$, $k_4(=\alpha_2K_2)$ および連結ダンパーの減衰係数 $c_2(=\alpha_1c_1)$，$c_4(=\alpha_2c_2)$ を種々変化させると，Fig.3 に示す挙動を呈した．Fig.3 は，

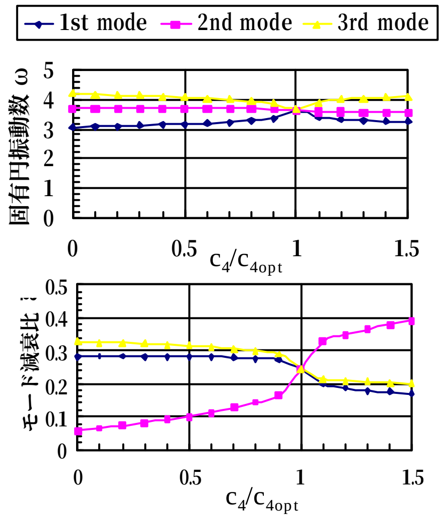

Fig.3 固有円振動数とモード減衰比

$M_{11} = M_{21} = M_{31} = 46.58\,\mathrm{kg}$，$\omega_{11} = 4.942\,\mathrm{rad/sec}$，$\omega_{21} = 0.3\omega_{11}$，$\omega_{31} = 0.6\omega_{11}$，$\alpha_1 = \alpha_2 = 4.0$，$\beta_1 = \beta_2 = 1.0$ の場合について，ばねのばね係数 k_2，k_4 および c_2 がそれぞれ特定の値 k_{2opt}，k_{4opt} および c_{2opt} を取るとき，c_4 の変動に伴う固有円振動数 ω_1，ω_2，ω_3 およびモード減衰比 ξ_1，ξ_2，ξ_3 の変動挙動を示している．この場合 $k_{2opt} = 131.924\,\mathrm{N/m}$，$k_{4opt} = 140.740\,\mathrm{N/m}$，$c_{2opt} = 113.590\,\mathrm{N\cdot s/m}$，$c_{4optt} = 10.048\,\mathrm{N\cdot s/m}$ で $x_{max} = 0.244, w_{opt} = 3.620$ であった．この結果より３自由度系のモード減衰比 ξ_1，ξ_2 および ξ_3 が等しく最大となる連結要素のばね係数 k_{2opt} および k_{4opt} ならびに減衰係数 c_{2opt} および c_{4opt} が存在し，このとき $\xi_1 = \xi_2 = \xi_3$ と同時に $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3$ となる場合であることが明かになった．この状態は Fig.2 に示す３自由度系の自由振動の特性指数 $\lambda_j = a_j \pm ib_j (j=1,2,3)$ が共に等しいとき(3 自由度系の特性根が３重根)に相当し，式(4)の λ_j に関する特性方程式が３重根を持つときに対応する。特性方程式が３重根($\lambda = a \pm ib$)を持つための条件は，Fig.2 に示した記号を用いて下記の置き換えを行うと，式(7)で与えられる．

$$\mu_1 = M_2/M_1, \mu_2 = M_3/M_1, \nu_1^2 = k_1/M_1, \nu_2^2 = k_2/M_2, \nu_3^2 = k_3/M_3, \nu_4^2 = k_4/M_2, \nu_5^2 = k_5/M_3, h_2 = c_2/(2M_2\nu_2), h_4 = c_4/(2M_2\nu_4)$$
$$A_1 = 1 + 1/\mu_1, A_2 = 1/\mu_1 + 1/\mu_2, A_3 = \nu_1^2 + \nu_3^2 + \nu_5^2, A_4 = 1/\mu_1 + 1/\mu_2 + 1/(\mu_1\mu_2), A_5 = \nu_1^2/\mu_1 + \nu_3^2 + \nu_5^2 + \nu_5^2/\mu_1,$$
$$A_6 = \nu_1^2/\mu_1 + \nu_1^2/\mu_2 + \nu_3^2/\mu_2 + \nu_5^2/\mu_1, A_7 = \nu_1^2\nu_3^2 + \nu_1^2\nu_5^2 + \nu_3^2\nu_5^2, A_8 = (\nu_1^2 + \mu_1\nu_1^2 + \mu_2\nu_1^2)/(\mu_1\mu_2), A_9 = (\mu_2\nu_1^2\nu_5^2 + \mu_1\mu_2\nu_3^2\nu_5^2)/(\mu_1\mu_2),$$
$$A_{10} = (\mu_1\nu_1^2\nu_3^2 + \mu_2\nu_1^2\nu_5^2)/(\mu_1\mu_2), A_{11} = \nu_1^2\nu_3^2\nu_5^2 \quad (6)$$

$$(2h_2\nu_2)A_1 + (2h_4\nu_4)\mu_1A_2 + 6a = 0, \qquad A_3 + \mu_1\nu_2^2A_1 + \mu_1\nu_4^2A_2 + (2h_2\nu_2)(2h_4\nu_4)\mu_1A_4 - 3(5a^2 + b^2) = 0, \qquad (2h_2\nu_2)A_5 + (2h_4\nu_4)\mu_1A_6$$
$$+ (2h_2\nu_2)\mu_1\nu_4^2A_4 + (2h_4\nu_4)\mu_1^2\nu_2^2A_4 + 4a(5a^2 + 3b^2) = 0, \qquad A_7 + \mu_1\nu_2^2A_5 + \mu_1\nu_4^2A_6 + \mu_1^2\nu_2^2\nu_4^2A_4 + (2h_2\nu_2)(2h_4\nu_4)\mu_1A_8$$
$$- 3(a^2 + b^2)(5a^2 + b^2) = 0, \qquad (2h_2\nu_2)A_9 + (2h_4\nu_4)\mu_1A_{10} + (2h_2\nu_2)\mu_1\nu_4^2A_8 + (2h_4\nu_4)\mu_1^2\nu_2^2A_8 + 6a(a^2 + b^2)^2 = 0, \quad (7)$$
$$A_{11} + \mu_1\nu_2^2A_9 + \mu_1\nu_4^2\alpha A_{10} + \mu_1^2\nu_2^2\nu_4^2A_8 - (a^2 + b^2)^3 = 0$$

式(7)を h2,h4, ν22, ν42,a および b を未知数として連立方程式を解くことにより特性指数λが３重根を持つ,すなわち三つのモード減衰比が等しく,かつ三つの固有円振動数が等しくなるときの $c_{2opt}, c_{4opt}, k_{2opt}, k_{4opt}$ および特性指数 $\lambda_{opt} = a_{opt} + ib_{opt}$ が求められる．　**(構造物の連結部材)**　３自由度系における連結要素のばね係数および減衰係数と連結部材のばね係数と減衰係数との間には Fig. 2 に示すように連結要素１については $k_2 = \alpha_1K_1$ および $c_2 = \alpha_1C_1$ の関係が，連結要素２には $k_4 = \alpha_2K_2$ および $c_4 = \alpha_2C_2$ の関係があることより，連結部材１の最適ばね係数 K_{1opt} および最適減衰係数 C_{1opt} および連結要素２の最適ばね係数 K_{2opt} および最適減衰係数 C_{2opt} 次式で表わされる．

$$K_{1opt} = k_{2opt}/\alpha_1, C_{1opt} = c_{2opt}/\alpha_1, K_{2opt} = k_{4opt}/\alpha_2, C_{2opt} = c_{4opt}/\alpha_2 \quad (8)$$

先に示した３自由度系は，塔の高さは 30mm で塔１の曲げ剛性 $EI_1 = 2.485\times10^6\,\mathrm{Nm^2}$,単位長さ質量 $m_1 = 1.553\,\mathrm{kg}$，塔２については,$EI_2/EI_1 = 0.09$，$m_2/m_1 = 1.0$，塔３については，$EI_2/EI_1 = 0.36$，$m_2/m_1 = 1.0$ の諸量を有するとき，塔頂を連結した場合に相当し，この場合 $K_1 = 32.98\,N/m, K_2 = 35.19\,N/m, C_1 = 28.40\,N\cdot s/m,\ C_1 = 28.40\,N\cdot s/m$ であった．

4．結び　三つの構造物をばねとダンパーから構成される連結部材で相互に連結した場合を想定し,三つの構造物の１次モードの減衰性能を向上させる方法を提案した．　**参考文献**　1)會田、麻生、竹下：二つの構造物の相互連結による減衰性能向上の一手法について、土木学会第 55 回年次講演会講演概要集第一部(B)