

不整形地盤を伝播する SH 波動場の 固有関数展開表示について

東京大学 学生員 中川 英則 *)
東京理科大学 正会員 東平 光生 **)

1. はじめに

不整形地盤を伝播する波動場の解析では，地震動の変形，増幅，減衰といった現象が不整形のどの要素に由来するかを同定することが大切となるが，例えば入射角の違いによってどの付近で波動が増幅されるかなどの判断は数値計算による解析が不可欠と考えられている．そこで本論文では，Green 関数のスペクトル表現と境界積分方程式を用いた散乱波のスペクトル分解¹⁾を，不整形地盤の解析へ適用させることを検討した．ここで不整形地盤を伝播する SH 波動場に対し，この手法を適用する上での大きな問題点は，境界積分とスペクトル積分の順序交換となる．ここでは，超関数論²⁾で与えられる議論を参考にして積分の順序交換の問題を解決し，不整形地盤内の波動を連続スペクトルに対する固有関数によって分解することを試みた．

2. 解析モデル

本論文では，Fig.1 に示すような半無限媒体の上にある不整形な境界を有する層に，下方向から SH 平面波が入射する問題を考えている．ここで上層は，波数 k_1 をもつ均質で等方性の層であり，基盤層は波数 k_2 をもつ均質で等方性の半無限媒体とする．また入射波 u_i は，波数 k_0 で， $x-z$ 平面に対して z 方向から θ_0 の角度で入射するとした．したがって，入射波 u_i は，観測点 P の座標を (x_P, z_P) ，入射波の初期位置を (x_{INI}, z_{INI}) としたとき次式で与えられる．但し，式 (1) の第 2 項目は鏡像解の影響を表す項となっている．

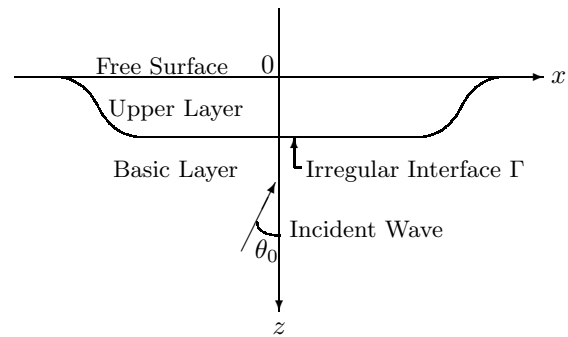


Fig.1 Analysis Model

$$u_i(P) = e^{ik_0(x_P - x_{INI}) + i\nu_0(z_P - z_{INI})} + e^{ik_0(x_P - x_{INI}) - i\nu_0(z_P + z_{INI})} \dots\dots\dots (1)$$

$$\nu_0 = k_2 \cos \theta_0 = \sqrt{k_2^2 - k_0^2} \dots\dots\dots (2)$$

3. 境界積分方程式

観測点 P が境界 Γ 上にある場合，表層・半無限層のそれぞれに対する境界積分方程式を用いて表現すると次のような式が立つ．ここに，点 Q は境界 Γ 上を動くソ - スを， $G(P, Q)$ は Green 関数を， $\frac{\partial}{\partial n_Q}$ は点 Q での法線方向微分をそれぞれ表すものである．

$$(\text{表層}) : \quad \frac{1}{2} u_1(P) = \int_{\Gamma} G(P, Q) \frac{\partial u_1(Q)}{\partial n_Q} - \frac{\partial G(P, Q)}{\partial n_Q} u_1(Q) ds_Q \dots\dots\dots (3)$$

$$(\text{半無限層}) : \quad \frac{1}{2} u_2(P) = \int_{\Gamma} G(P, Q) \frac{\partial u_2(Q)}{\partial n_Q} - \frac{\partial G(P, Q)}{\partial n_Q} u_2(Q) ds_Q + u_i(P) \dots\dots\dots (4)$$

1) T. Touhei : Computational Mechanics Vol25,2000,Scattering Problem by means of Spectral Representation of Green's Function for a Layered Acoustic Half Space (in press), 2) 洲之内 治男：改訂 関数解析入門 サイエンス社，3) 伊藤 清三：ルベ - グ積分入門 裳華房

4. 固有関数展開

境界積分方程式 (3),(4) に現れる Green 関数は距離 R (点 P と点 Q との距離), 距離 R' (点 P と点 Q の自由境界面に対する鏡像点との距離) に関する 0 次第 2 種 Hankel 関数の和として表現できるが, さらに Fig.2 に示す積分経路をとることで C 上での波数積分として展開できる.

$$G(P, Q) = -\frac{i}{4} \left[H_0^{(2)}(k_m R) + H_0^{(2)}(k_m R') \right] \dots\dots (5)$$

$$= \frac{i}{2} \int_C \exp(i\xi |x_P - x_Q|) \psi_\xi(z_P) \psi_\xi(z_Q) d\xi \quad (6)$$

$$\psi_\xi(z) = \left[\frac{2}{\pi \sqrt{k_m^2 - \xi^2}} \right]^{\frac{1}{2}} \cos(\sqrt{k_m^2 - \xi^2} z) \dots\dots (7)$$

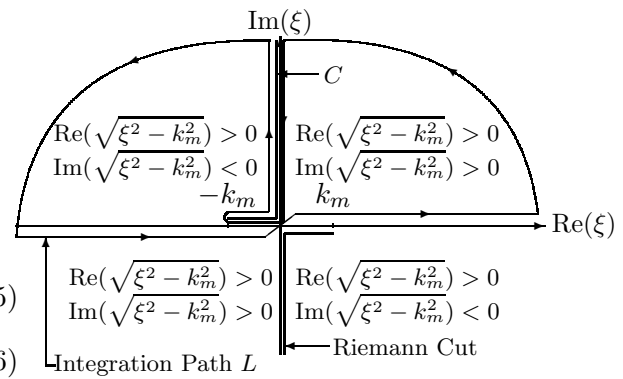


Fig.2 Integration path in the complex ξ -plane

ここに, 添字 m は 1 あるいは 2 の値をとり, 1 の場合は式 (3) で用いる表層での Green 関数を, 2 の場合は式 (4) で用いる半無限層での Green 関数をそれぞれ表す.

さてここで, 式 (6) の表現を式 (3),(4) の Green 関数に代入し, 境界積分とスペクトル積分の順序交換を行うことを考える. 但し, $x_P = x_Q$ なる場合はスペクトル積分が発散してしまい積分の順序交換が成立しない³⁾. このため, 急減少関数 $e^{i\xi\epsilon}$ を被積分関数に掛けて積分値を有限値に抑えた後, $\epsilon \rightarrow 0$ と極限移行した.

以上より, 最終的に表層および半無限層での変位場はそれぞれ次式の形にまとめることができる.

$$u_1(P) = \frac{i}{2} \int_C A(x_P) \psi_\xi(z_P) d\xi \quad (\text{観測点 } P \in \text{表層}) \dots\dots\dots (8)$$

$$u_2(P) = \frac{i}{2} \int_C B(x_P) \psi_\xi(z_P) d\xi + u_1(P) \quad (\text{観測点 } P \in \text{半無限層}) \dots\dots\dots (9)$$

5. 数値計算例

Fig.1 において, 不整形性を有する境界部の底辺に当たるフラットな部分の長さが z 軸をさかいに左右 2km の計 4km, それに続く両サイド部分が長さ 2km に渡って正弦曲線的に変化する形となっている場合を想定した. 表層は, 厚み 1km, 媒質の質量密度が 1.9g/cm^3 , せん断係数が $1.539 \times 10^5 \text{ N/cm}^2$. 半無限的層は, 媒質の質量密度が 2.3g/cm^3 , せん断係数が $13.248 \times 10^5 \text{ N/cm}^2$ となっている. ここに, 振動数 1Hz の平面波が境界底部の中心点 $(x, z) = (0.0\text{km}, 1.0\text{km})$ を基準として, 一定の距離 (99km) から z 軸に対しある角度をもって入射するとした. Fig.3 は, Fig.1 に示す図において観測点 P の z 座標を 0.001Km に固定したまま, x 座標を正方向にずらしていった場合の各観測位置での変位量 (m) を BEM および本論文で示した固有関数展開の各場合について比較したものである. 両者の値の比較から, 本手法の妥当性が窺える.

6. 結論

本論文では, スペクトル表現された基本解を用いることで, 不整形地盤内を伝播する波動場を固有モードの重ね合わせとして表現することを試みた. 境界積分とスペクトル積分の順序交換が自由にできたことから, 不整形地盤に対する Green 関数およびその波数積分表現を構成することが可能になると考える. この場合, Green 関数の構成に当たって具体的には, 0 次第 2 種 Hankel 関数を入射波の影響として用いればよいことになる.

X 座標 (Km)	Z 座標 (Km)	BEM(m)	固有関数展開 (m)
0.0	0.001	(実部) 10.02894	(実部) 10.01393
		(虚部) 3.25857	(虚部) 3.24706
1.5	0.001	(実部) -2.22194	(実部) -2.20627
		(虚部) -2.01866	(虚部) -2.00253
2.0	0.001	(実部) -3.10973	(実部) -3.11206
		(虚部) 0.22356	(虚部) 0.21315
3.0	0.001	(実部) -1.29699	(実部) -1.28775
		(虚部) 1.57723	(虚部) 1.58292
5.0	0.001	(実部) -2.39214	(実部) -2.38971
		(虚部) 1.73396	(虚部) 1.73271

Fig.3 BEM および固有関数展開を用いた場合の計算解の比較 (45 度方向から入射の場合)