

インパルス列の群遅延時間スペクトルの周波数特性について

鳥取大学工学部 正会員 盛川 仁 京都大学防災研究所 正会員 澤田純男
京都大学工学研究科 正会員 土岐憲三 愛知県庁 正会員 川崎久仁生

1. はじめに 地震動のように非定常な時刻歴波形を扱う場合、その非定常性に関する情報を豊富に有していると考えられる位相スペクトルの性質を知ることが、地震動特性の予測を行ううえでも重要である。既に、筆者らはランダムに発生するインパルス列の群遅延時間スペクトルの確率論的特性について検討を行ってきたが¹⁾、その高周波数領域でのばらつきに関する理論的考察は十分に行われていなかった。本研究では、群遅延時間の高周波数領域でのばらつきに関する確率論的性質を解析的に求め、その統計的な意味について考察する。

2. インパルス列の群遅延時間スペクトル 任意の時刻 t_k に発生するインパルスをデルタ関数を用いて $\delta(t - t_k)$ と表すと、インパルス列は $h(t) = \alpha \sum_{k=1}^n \delta(t - t_k)$ となる。ここで、 t_k は平均 μ 、分散 σ^2 の確率密度関数 $f_T(t)$ からの実現値である。このとき、インパルス列 $h(t)$ の群遅延時間スペクトル $t_{gr}(\omega)$ は、

$$t_{gr}(\omega) = \frac{(\sum_{k=1}^n t_k \cos \omega t_k)(\sum_{k=1}^n \cos \omega t_k) + (\sum_{k=1}^n t_k \sin \omega t_k)(\sum_{k=1}^n \sin \omega t_k)}{(\sum_{k=1}^n \cos \omega t_k)^2 + (\sum_{k=1}^n \sin \omega t_k)^2} \quad (1)$$

となる。低周波領域では、 $t_{gr}(\omega)$ は大きくばらつくことなく、 $f_T(t)$ のフーリエ変換によって規定されることがわかっているが¹⁾、高周波領域のばらつきと t_k の確率密度関数 $f_T(t)$ の関係ははっきりとしていなかった。そこで、式 (1) の各項ごとの分布や各項間の相関関係などを調べた上で、インパルス列の群遅延時間スペクトル $t_{gr}(\omega)$ の分布形の定式化を行なう。

3. インパルス列の $t_{gr}(\omega)$ の分子・分母の分布形 式 (1) よりわかるとおり、インパルス列の $t_{gr}(\omega)$ は $\sum_{k=1}^n t_k \cos \omega t_k$ と $\sum_{k=1}^n \cos \omega t_k$ の組み合わせによっている。中心極限定理を用いてこれらの分布形を求めると、いずれも t_k の分布形には依存せず、かつ、高周波領域では ω にも依存しないことがわかる。その確率分布は、それぞれ、 $N(0, \frac{n(\mu^2 + \sigma^2)}{2})$ 、 $N(0, \frac{n}{2})$ なる正規分布である。

式 (1) の分母、分子ともに第 1 項と第 2 項の相関はほとんど 0 であるが、分子の第 1 項の積を構成する二つの項は高い相関を有している。このことを利用すると、 $t_{gr}(\omega)$ の分子 P は次のような指数分布に従う。

$$f_p(x) = \frac{1}{n\sqrt{\mu^2 + \sigma^2}} \exp\left(-\frac{x}{n\sqrt{\mu^2 + \sigma^2}}\right) \quad (2)$$

このときの群遅延時間スペクトルの分子 P の平均、標準偏差は、それぞれ、 $\mu_p = n\sqrt{\mu^2 + \sigma^2}$ 、 $\sigma_p = n\sqrt{\mu^2 + \sigma^2}$ となる。インパルス発生の確率密度関数 $f_T(t)$ が一様分布の場合について、式 (2) とシミュレーションから求めた $t_{gr}(\omega)$ の分子のヒストグラムを比較したものを、図 1 に示す。

図 1 から、式 (2) がほぼ成り立っていることがわかる。指数分布では負の領域に値を持つことはないが、図 1 に示したヒストグラムには負の値をとるものがある。これは、 $\sum_{k=1}^n t_k \cos \omega t_k$ と $\sum_{k=1}^n \cos \omega t_k$ の相関係数を $\rho = 1$ とおいたが、実際は完全には $\rho = 1$ ではないので、負の値をとる場合があるためと考えられる。

式 (1) の分母 Q についても第 1 項と第 2 項の相関を 0 として扱えるので、平均 $\mu_q = n$ 、標準偏差 $\sigma_q = n$ の指数分布となる。

4. インパルス列の $t_{gr}(\omega)$ の平均値 群遅延時間スペクトルの分子と分母の相関関係を調べると、群遅延時間スペクトルの分子と分母の間には非常に良い相関があることがわかる。従って、両者の相関係数が 1 であるとする、 $t_{gr}(\omega)$ は分子と分母の平均の比によって与えられ、 $t_{gr}(\omega) \approx \sqrt{\mu^2 + \sigma^2}$ となる。これは、群遅延時間スペクトルの平均的な値を表していると考えられる。しかし、インパルス発生の確率密度関数 $f_T(t)$ の分

Keywords: 群遅延時間, インパルス列, 周波数特性, 確率密度関数, 相関係数

〒680-8552 鳥取市湖山町南 4-101 (e-mail: morika@cv.tottori-u.ac.jp http://wwwstr.cv.tottori-u.ac.jp/~morika/)

散 σ^2 が変わっても $t_{gr}(\omega)$ の分子 P はほとんど違いが見られず、 $\sigma^2 = 0$ の場合と比べてもほぼ同じ値をとるので、分子 P において $\sigma \approx 0$ とすると、 $t_{gr}(\omega) \approx \mu$ となる。したがって、群遅延時間スペクトルの平均的な値は、時刻歴波形の平均値によって表されることがわかる。

5. インパルス列の $t_{gr}(\omega)$ のばらつき 群遅延時間スペクトルの分子 P と分母 Q の相関係数を 1 とおくと、群遅延時間スペクトル $t_{gr}(\omega)$ の値は常に一定値をとり、群遅延時間スペクトル $t_{gr}(\omega)$ のばらつきは生じない。しかし実際には、群遅延時間スペクトル $t_{gr}(\omega)$ は大きなばらつきを持っている。これは、群遅延時間スペクトルの分子と分母の相関係数すなわち、 $\sum_{k=1}^n t_k \cos \omega t_k$ と $\sum_{k=1}^n \cos \omega t_k$ の相関係数が完全には 1 とはならないためであると考えられる。群遅延時間スペクトル $t_{gr}(\omega)$ の分子 P と分母 Q の相関係数が非常に 1 に近いことから、 $t_{gr}(\omega)$ はほとんどの情報が時刻歴波形の平均値を表しており、相関係数が完全には 1 とならないわずかな部分でばらつきを表現しているといえる。

群遅延時間スペクトルのばらつきを表現するために、 $t_{gr}(\omega)$ の分子と分母の相関係数が $\rho = 1$ とならない部分を、分母 Q と相関のない正規確率変数 $Z = N(0, \sigma_z^2)$ で表すものとし、 $t_{gr}(\omega)$ の分子を、分母と完全な相関関係にある部分 $\frac{n\mu}{2}Y$ と正規変量 $Z = N(0, \sigma_z^2)$ の和で表す。すなわち、 $P = \frac{n\mu}{2}Y + Z$ とする。このとき、 $t_{gr}(\omega) = \mu + w$ と表せて、第 1 項で $t_{gr}(\omega)$ の平均的な値を表し、第 2 項で $t_{gr}(\omega)$ の分布形を表現できる。この式の第 2 項は互いに独立な正規分布と指数分布に従う確率変量の比として解析的に求めることができる。

$t_{gr}(\omega)$ のばらつきを表す確率変数 Z の標準偏差 σ_z はインパルス発生の確率密度関数 $f_T(t)$ の標準偏差 σ とほぼ完全な線形関係を持っているため、直線回帰によって、 $\sigma_z = 0.711n\sigma$ とできる。以上より、群遅延時間スペクトル $t_{gr}(\omega)$ の確率密度関数 $f_{tgr}(x)$ は、

$$f_{tgr}(x) = \frac{0.711\sigma}{(x - \mu)^2 \sqrt{2\pi}} - \frac{0.253\sigma^2}{|x - \mu|^3} \exp\left(\frac{0.253\sigma^2}{(x - \mu)^2}\right) \left\{1 - \Phi\left(\frac{0.503\sigma}{|x - \mu|}\right)\right\} \quad (3)$$

となる。ただし、 $\Phi(x) = \text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$ である。式 (3) から得られる理論値と、シミュレーションから求められる群遅延時間スペクトル $t_{gr}(\omega)$ の頻度分布を図 2 に示す。

6. まとめ インパルス発生時刻の確率密度関数 $f_T(t)$ の関数形によらず、 $f_T(t)$ の平均値 μ と標準偏差 σ から、式 (3) で群遅延時間スペクトル $t_{gr}(\omega)$ の分布を、ほぼ表現できることがわかった。このことは、高周波領域における群遅延時間スペクトルは、(1) その確率分布特性は周波数に依存しないこと、(2) 従って振動数軸上の統計量がアンサンブルの意味での統計量を与えること、(3) インパルス発生時刻の確率分布の形状によらず、 $t_{gr}(\omega)$ の分布形は式 (3) で与えられ、(4) 一般に考えられるような正規分布ではなく、やや裾が重い分布形状となること、(5) $t_{gr}(\omega)$ がもとの波形の 2 次モーメントまでの情報を有していること、が明らかとなった。

参考文献 1) 盛川ほか、第 25 回地震工学研究発表会講演論文集、1999.7, pp.93-96.

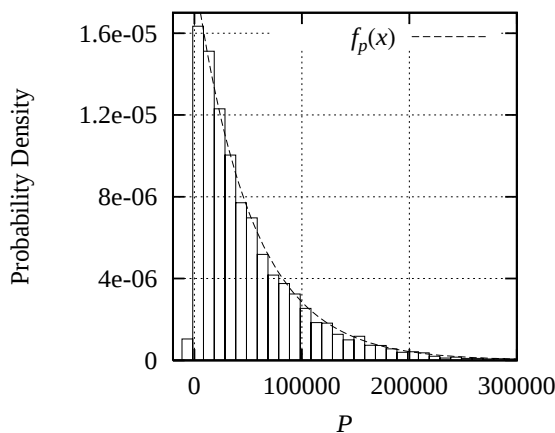


図 1 群遅延時間スペクトルの分子の頻度分布

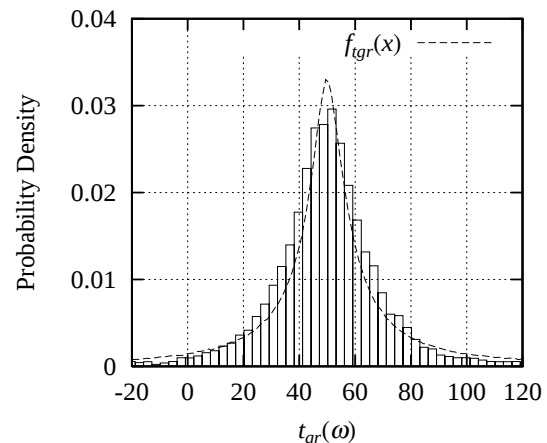


図 2 群遅延時間スペクトルの分布形