

高次振動法によるケーブル張力算定精度の検証

(株)神戸製鋼所 正会員○宇津野秀夫 (株)神戸製鋼所 正会員 山極伊知郎
(株)神戸製鋼所 正会員 杉井 謙一 (株)コベルコ科研 遠藤浩司

1. まえがき

著者らは既報^{1,2}で、複数の固有振動数を利用したケーブル張力と曲げ剛性の一括算定方法を提案している。本報では、同方法の理論的な算定精度を検討し、引張り試験機を用いた実験で算定精度を検証する。

2. 高次振動法によるケーブル張力と曲げ剛性の算定理論

両端固定ケーブルの厳密な振動数方程式に対し、橋梁の長大性を利用して $\exp(-\beta L) = 0$ と仮定すると、固有振動数 f_i は、曲げ剛性 EI と張力 T とを係数とするモード次数 i の多項式で表現される。

$$f_i^2 \approx \frac{p^2 EI}{4mL^4} \left(i + \frac{f}{p} \right)^4 + \frac{T}{4mL^2} \left(i + \frac{f}{p} \right)^2 = \frac{p^2 EI}{4mL^4} \left[\left(i + \frac{f}{p} \right)^4 + \frac{x^2}{p^2} \left(i + \frac{f}{p} \right)^2 \right] \quad (1)$$

ここで L はケーブル長、 μ は線密度、 $\xi = L\sqrt{T/EI}$ 、 $\tan f = \frac{2w}{T}\sqrt{mEI}$ 、 $b = \sqrt{\left(\frac{T}{2EI} \right)^2 + \frac{m\omega^2}{EI} + \frac{T}{2EI}}$ である。

複数の固有振動数に対し、最小 2 乗法を適用して多項式(1)の係数である T と EI を算定する。振動数測定値 $\bar{f}_i$ 、最確値 f_i 、残差 $v_i = \bar{f}_i - f_i$ とすると、残差の 2 乗和 $\sum v_i^2$ は次式の条件で最小となる。

$$\begin{bmatrix} \sum X_i^8 / \bar{f}_i^2 & \sum X_i^6 / \bar{f}_i^2 \\ \sum X_i^6 / \bar{f}_i^2 & \sum X_i^4 / \bar{f}_i^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} G_1 \\ G_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum X_i^4 \\ \sum X_i^2 \end{pmatrix} \quad (2)$$

ここで、 $f_i^2 = G_1 X_i^4 + G_2 X_i^2$ 、 $G_1 = \pi^2 EI / 4\mu L^4$ 、 $G_2 = T / 4\mu L^2$ 、 $X_i = (i + \phi_i / \pi)$ である。

3. 算定精度の検討

算定精度に影響を及ぼす要因には、固有振動数の近似式(1)の採用、最小 2 乗法における誤差、境界条件の違い、物理量の読み取り誤差がある。以下にそれぞれの影響を理論的に検討する。

3. 1 固有振動数の近似式 橋梁ケーブルの長大性から、近似式(1)では $\exp(-\beta L) = 0$ と仮定した。ここでは、より厳しい条件 $\exp(-2\beta L) = 0$ と仮定する。このとき固有振動数方程式は次式に変形される。

$$\sin(\alpha L - f) = -\exp(-\beta L) / \sqrt{1 + \frac{T^2}{4m\omega^2 EI}} = -d \quad \text{ここで、} \alpha = \sqrt{\left(\frac{T}{2EI} \right)^2 + \frac{\mu\omega^2}{EI} - \frac{T}{2EI}}$$

微小量 δ に関して、以下の不等式が成立し、上限値 δ_1 がモード次数 i と ξ で決定される。

$$0 < \delta < \exp(-\beta L) \approx \exp \left\{ -\sqrt{\xi^2 + (i\pi + \phi)^2} \right\} < \exp \left\{ -\sqrt{\xi^2 + (i\pi)^2} \right\} = \delta_1 \quad (3)$$

表 1 に δ_1 の試算例を示す。この δ_1 を用いると、固有振動数は以下の式で計算される。

$$\alpha L - \phi = i\pi - (-1)^i \delta_1 \Rightarrow f_i^2 = \frac{\pi^2 EI}{4\mu L^4} \left(i + \frac{\phi}{\pi} - (-1)^i \frac{\delta_1}{\pi} \right)^4 + \frac{T}{4\mu L^2} \left(i + \frac{\phi}{\pi} - (-1)^i \frac{\delta_1}{\pi} \right)^2 \quad (4)$$

式(1)の固有振動数 f と両近似式の差 Δf に対し、曲げもしくは引張りのどちらかが支配的と考えて $\Delta f / f$ を求める。このとき、 $\Delta f / f$ には上限値 $2\delta_1 / \pi i$ が存在する。

$$\Delta f / f < 2\delta_1 / \pi i^2 \quad \text{or} \quad \delta_1 / \pi i < 2\delta_1 / \pi i$$

キーワード ケーブル、振動、張力、曲げ剛性、診断

連絡先 〒651-2271 神戸市西区高塚台 1 丁目 5-5 Tel.078-992-5639 Fax.078-993-2056

表 2 に上限値 $2\delta_1/\pi i$ の試算例を示す。2 次以上の固有振動数では、式(1)は十分に高い精度と確認できる。

3. 2 最小 2 乗法における誤差 固有振動数の読み取り誤差が最小 2 乗法に及ぼす影響を検討する。

真値を*、誤差をΔで代表し、見通しを得るために関係式を線形化する。

$$\bar{f}_i = f_i^* + \frac{\Delta f_i}{2}, G_1 = G_1^* + \Delta G_1, G_2 = G_2^* + \Delta G_2, \quad \frac{1}{\bar{f}_i^2} = \frac{1}{(f_i^*)^2 + f_i^* \Delta f_i + (\Delta f_i)^2/4} \approx \frac{1}{(f_i^*)^2} \left(1 - \frac{\Delta f_i}{f_i^*} \right)$$

式(2)に上記関係式を代入し、各モード次数で $\Delta f_i/f_i^* = +\varepsilon$ と仮定すると、誤差は次式で推定される。

$$\Delta G_1/G_1^* = -\varepsilon + 2\varepsilon = \varepsilon, \quad \Delta G_2/G_2^* = -\varepsilon + 2\varepsilon = \varepsilon$$

周波数の読み取り誤差は、真値に対して±どちらの符号も取りえるが、最大 2ε 程度の誤差と考えられる。

3. 3 境界条件の影響 橋梁ケーブルは、通常固定境界とみなされる。この場合、端部から距離 $x = L_1, L_2$ 離れた 2 点の振動振幅の比 $W(L_1)/W(L_2)$ は、次式で計算できる。

$$H(\omega) = \frac{W(L_1)}{W(L_2)} = \frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \sin(\alpha L_1 - \theta) + \alpha \exp(-\beta L_1)}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \sin(\alpha L_2 - \theta) + \alpha \exp(-\beta L_2)} \quad \text{ここで } q = \tan^{-1}(a/b) \quad (5)$$

上式から計算した振動振幅の比と実測値とを比較して、固定境界条件の妥当性を確認することができる。

3. 4 物理量の読み取り誤差 周波数 f の誤差、ロープ質量 M の誤差、ロープ長 L の誤差を勘案すると、曲げ剛性 EI および張力 T の誤差は次式で評価できる。

$$\left| \frac{\Delta(EI)}{EI} \right| = \left| \frac{\Delta G_1}{G_1} \right| + \left| \frac{\Delta M}{M} \right| + 3 \left| \frac{\Delta L}{L} \right| = 2 \left| \frac{\Delta f}{f} \right| + \left| \frac{\Delta M}{M} \right| + 3 \left| \frac{\Delta L}{L} \right|, \quad \left| \frac{\Delta T}{T} \right| = \left| \frac{\Delta G_2}{G_2} \right| + \left| \frac{\Delta M}{M} \right| + \left| \frac{\Delta L}{L} \right| = 2 \left| \frac{\Delta f}{f} \right| + \left| \frac{\Delta M}{M} \right| + \left| \frac{\Delta L}{L} \right|$$

4. まとめ 直径 16mm、長さ 3.8m の棒鋼と表 3 に示す 3 種類のロープを対象に、高次振動法を用いて張力を測定し、引張り試験機の値と比較した。結論を以下に列記する。

1. 本手法によるケーブル張力算定誤差は、周波数分解能、線密度、長さから最大 1% と推定した。
2. 本手法による張力算定値と引張り試験機の荷重とは $10 < \xi < 111$ の範囲で 1% 以下となった。
3. 振動振幅比の測定値は、(5)式に示した固定境界条件に近い値となった。

表 1 δ_1 の試算例

	i=1	i=2	i=3	i=4
$\xi=0$	4.3E-2	1.9E-3	8.1E-5	3.5E-6
$\xi=1$	3.7E-2	1.7E-3	7.7E-5	3.4E-6
$\xi=\pi$	1.2E-2	8.9E-4	4.8E-5	2.4E-6
$\xi=10$	2.8E-5	7.4E-6	1.1E-6	1.1E-7

表 2 $2\delta_1/\pi i$ 試算例

	i=1	i=2	i=3	i=4
$\xi=0$	2.7E-2	5.9E-4	1.7E-5	5.5E-7
$\xi=1$	2.4E-2	5.5E-4	1.6E-5	5.3E-7
$\xi=\pi$	7.5E-3	2.8E-4	1.0E-5	3.8E-7
$\xi=10$	1.8E-5	2.4E-6	2.3E-7	1.7E-8

表 3 供試ロープの条件

外径 D	長さ L	張力 T kN	ξ 範囲	f_s Hz	Δf Hz
φ28.7 mm	2 m	100,202,301,497	$10 < \xi < 23$	2000 Hz	0.12
φ14.0 mm	2 m	48.8, 99.6, 148	$26 < \xi < 45$	2000 Hz	0.12
φ14.0 mm	5 m	49.6, 99.3, 145	$65 < \xi < 111$	500 Hz	0.030

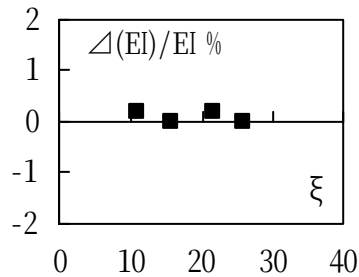


図 1 棒鋼の曲げ剛性

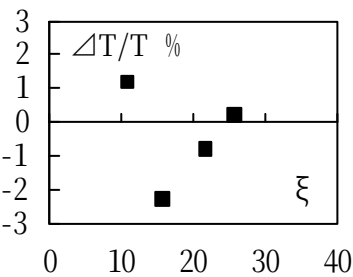


図 2 棒鋼の張力

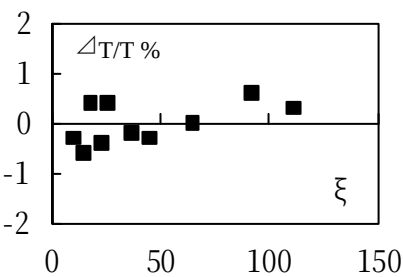


図 3 ロープの張力

参考文献 1)山極、宇津野、遠藤、杉井、構造工学論文集 Vol. 42A(1996.3), p.547-554
2)宇津野、山極、遠藤、杉井、構造工学論文集 Vol. 44A(1998.3), p.853-860