

薄肉直線桁の固有振動解析とモード連成について

北海道大学大学院工学研究科 フェロー 林川俊郎
 (株) 長大 正会員 北島 勉
 北海道大学大学院工学研究科 正会員 松井義孝
 北海道大学大学院工学研究科 フェロー 佐藤浩一

1. はじめに

一般に構造物の固有振動解析は、部材要素を2軸対称の棒部材にモデル化するため要素断面の図心とせん断中心は一致し、曲げ振動とねじり振動は連成しない。しかし、実際の構造部材には薄肉断面が用いられることが多く、非対称性を有する断面においては、断面の図心とせん断中心が異なることに伴い曲げ振動とねじり振動が連成する。また、せん断変形を考慮したはり理論として最も一般的なものは、はりの曲げに伴うせん断変形を考慮した Timoshenko はり理論である。薄肉断面を用いる場合にはそりねじりに伴うせん断変形を考慮する必要がある。そこで本研究の目的は、薄肉断面を有する直線桁を対象としてそりねじり変形に伴うせん断変形を考慮した固有振動解析を行い、その精度について考察するとともに、2軸非対称断面を有する直線桁におけるモード連成について検討するものである。

2. 解析方法

(1) 固有振動解析

薄肉変断面部材の解析では、モデル化として変断面部材をいくつかの直線部材に分割して重ね合わせる方法が用いられるのが一般的である。例えば、隣り合う要素間で部材の図心軸あるいはせん断中心軸が不連続になる場合には、各要素の剛性マトリックスおよび質量マトリックスを単純に重ね合わせることができない。このような薄肉変断面部材は、要素両端断面上の任意の点に関する剛性マトリックスと質量マトリックスを作成することにより解析が可能となる。図—1に示すような薄肉断面要素において、座標変換マトリックス T を用いることにより、図心位置における要素剛性マトリックス K および要素質量マトリックス M を、部材要素両端断面上の任意点における要素剛性マトリックス K_{pq} 、要素質量マトリックス M_{pq} へ次式により変換することができる¹⁾。

$$K_{pq} = T^T K T, \quad M_{pq} = T^T M T \quad \dots (1)$$

要素境界面上で同一の解析点に関する剛性マトリックスおよび質量マトリックスが得られれば、構造物全体について重ね合わせを行うことができる。

(2) せん断変形を考慮した剛性マトリックス

Timoshenko はり理論は、曲げに伴うせん断変形を考慮した理論であるが、薄肉断面を扱う場合にはそりねじりに伴うせん断変形を考慮する必要がある。そこで、Timoshenko はり理論の拡張としてそりねじりに関するせん断補正係数を用いて、せん断変形を考慮した剛性マトリックスを導く。そりねじりを考慮したねじり変形に関する剛性マトリックスは以下ようになる²⁾。

$$K_q = \begin{bmatrix} c & d & -c & d \\ & e & -d & f \\ & & c & -d \\ \text{sym} & & & e \end{bmatrix} \quad \dots (2)$$

ここに、 c, d, e および f は St. Venant の純ねじり定数 J 、そりねじり定数 C_w および部材長 L を含んだ形で以下のようなになる。(E はヤング係数、 G はせん断弾性係数)

$$\begin{aligned} c &= \frac{12}{1+j_x} \frac{EC_w}{L^3} + (1+\Phi_x) \frac{GJ}{L}, \quad d = \frac{6}{1+j_x} \frac{EC_w}{L^2} + \frac{1}{2} \Phi_x GJ, \\ e &= \frac{4+j_x}{1+j_x} \frac{EC_w}{L} + \frac{1}{12} (1+3\Phi_x) GJL, \\ f &= \frac{2-j_x}{1+j_x} \frac{EC_w}{L} - \frac{1}{12} (1-3\Phi_x) GJL \end{aligned} \quad \dots (3)$$

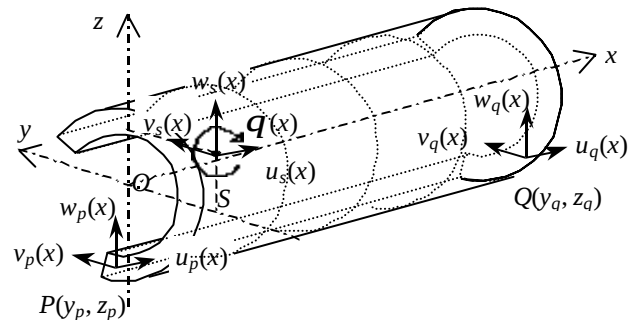
上式に含まれる j_x, Φ_x はそりねじりに関するせん断補正係数 k_x を含んだ形で以下のようなになる。

$$\begin{aligned} j_x &= \frac{12}{L^2} \left(1 + \frac{J}{J_s} \right) \frac{EC_w}{GJ_s}, \quad \Phi_x = \frac{1+60a_w j_x}{5(1+j_x)^2}, \quad a_w = \frac{EC_w}{GJ_s L}, \\ J_s &= k_x (I_y + I_z - J) \end{aligned} \quad \dots (4)$$

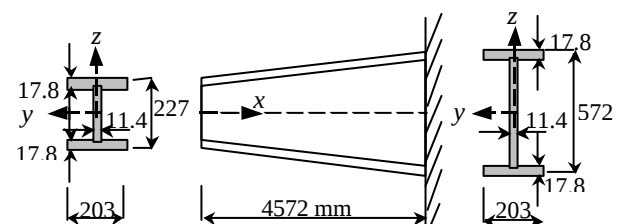
3. 数値計算結果

(1) せん断変形の影響

せん断変形の影響を調べるために、図—2に示すような Gupta モデルに関して数値計算を行う。整合質量法を



図—1 桁要素の集合体に分割した部材要素



図—2 Gupta モデル

Key Words: Warping, Shear Deformation, Shear Center, Modal Coupling

〒060-8628 札幌市北区北 13 条西 8 丁目 TEL 011-706-6172 FAX 011-726-2296

用いた固有振動解析において、せん断変形の影響を考慮した場合と無視した場合について固有円振動数(要素分割数は10分割)を求める。また、シェル要素を用いた3次元的な固有振動解析を行い固有円振動数(要素分割数は断面内で12分割、桁軸方向に50分割)を求め、整合質量法による解と比較する。数値計算結果を表—1に示す。

表—1には7次モードまでの解が示されておりそれぞれHは水平振動モード、Vは鉛直振動モード、Tはねじり振動モード、数字はモード次数である。すべての振動モードにおいてせん断変形を考慮した解がシェル要素における解に近い値となっている。このことから固有振動解析において、曲げおよびねじりに伴うせん断変形を考慮することは、3次元的な振動挙動を把握する上で重要であると考えられる。

(2) 合成2主桁橋のモード達成

図—3に示す合成断面のような、2軸非対称断面を有する直線桁の図心とせん断中心との偏心量を考慮に入れた固有振動解析を行うと、曲げ振動とねじり振動が達成した複雑な固有振動モードが現れ、三重達成振動問題では支配的な固有振動モードを判定することが困難な場合がある。そこでモード達成状態を判定する指標として、新たにモード達成比という算定式を提示する¹⁾。モード達成比とは、1節点7自由度を有する各固有振動モードの中で、それぞれの変位振幅が全体の変位振幅の総和に対して占める割合を数値的に表すパラメータである。

図—3に示す合成断面において、表—2に示す断面諸元を有し、支間長31.5mの合成2主桁橋を数値計算モデルとして、解析節点を図心およびせん断中心とした場合のモード達成比を表—3および表—4に示す。表—3,4より図心を解析節点とした場合には、主軸回りの曲げ振動が独立したモード形状で現れていることがわかる。しかし、高次モードにおいては若干他のモードが達成しており、重心と図心のずれの影響により曲げ振動を完全には分離できないことがわかる。また、ねじり振動は偏心距離の影響を受けて複雑な固有振動モードであることが理解できる。解析節点をせん断中心とした場合にも同様に、高次モードにおいては、ねじり振動を完全に分離できていないことがわかる。また図心の場合と逆に、曲げ振動は他の変位成分との達成振動モードが生じていることが理解できる。このことは、ねじり振動はせん断中心軸を、曲げ振動は図心軸を選択することにより、その達成効果を分離することができるものと考えられる。ただし、合成2主桁橋のような重心と図心のずれがある構造では完全には分離できないものと考えられる。

4. おわりに

本研究では、薄肉断面を有する直線桁を対象としてそのねじり変形に伴うせん断変形を考慮した固有振動解析を行い、その精度について考察するとともに、2軸非対称断面を有する直線桁におけるモード達成について検討した。

せん断変形の影響を調べた結果、せん断変形を考慮した解の方がシェル要素における解に近い値となり、せん断変形を考慮することは、3次元的な振動挙動を把握する上で重要であると考えられる。また、2主桁橋をモデルとしてモード達成比を求めた結果、ねじり振動はせん断中心軸を、曲げ振動は図心軸を選択することにより、その達成効果を分離することができるものと考えられる。ただし合成2主桁橋のような重心と図心のずれがある構造では、高次モードにおいて若干他の振動成分が達成し、曲げおよびねじり振動を完全には分離できないものと考えられる。

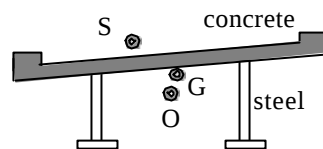
参考文献

- 1) 林川俊郎・武村信也・佐藤浩一：薄肉変断面桁の三重達成振動解析について、鋼構造年次論文報告集，第5巻，pp.309-312，1997年11月。
- 2) 林正・岩崎英治：ハイラー要素による骨組構造解析，土木学会論文集，No570，I-40，pp.163-174，1997。

表—1 固有円振動数の比較(rad/sec)

Mode		せん断変形の影響		Shell要素
		無視	考慮*	
1st	H1	42.12	42.08	41.63
		0.095	0.000	-1.069
2nd	T1	123.50	123.27	118.24
		0.187	0.000	-4.080
3rd	V1	190.23	184.95	185.32
		2.855	0.000	0.200
4th	H2	254.28	252.51	247.85
		0.701	0.000	-1.845
5th	T2	414.44	411.86	369.58
		0.626	0.000	-10.266
6th	H3	704.90	693.69	626.05
		1.616	0.000	-9.751
7th	T3	914.97	844.37	824.54
		8.361	0.000	-2.348

各モードの上段の値は固有円振動数を示す
各モードの下段の値は $(\ddot{u}-\ddot{u}^*)/\ddot{u}^* \times 100\%$ を示す
 $\ddot{u}^*$ はせん断変形を考慮した場合の解を示す



図—3 合成断面

表—2 断面諸元

$A(m^2)$	4.488×10^{-1}
$I_y(m^4)$	1.062×10^{-1}
$I_z(m^4)$	2.644×10^0
$J(m^4)$	2.737×10^{-4}
$C_w(m^6)$	5.069×10^{-1}
$m(t/m)$	3.523×10^0
図心 O	(0.000, 0.000)
せん断中心 S	(0.321, 0.312)
重心 G	(-0.008, 0.205)

表—3 図心におけるモード達成比(%)

	$\ddot{u}_x$	$\ddot{u}_y$	$\ddot{u}_z$	$\ddot{u}_{\theta x}$	$\ddot{u}_{\theta y}$	$\ddot{u}_{\theta z}$	$\ddot{u}_{\theta w}$	Total
T1	0.0	17.3	17.7	55.4	1.8	1.9	6.0	100.0
V1	0.0	0.0	90.9	0.0	9.1	0.0	0.0	100.0
T2	0.0	15.8	16.1	50.5	3.3	3.4	10.9	100.0
V2	0.1	0.0	83.3	0.0	16.6	0.0	0.0	100.0
H1	0.0	90.3	0.0	0.0	0.0	9.7	0.0	100.0
T3	0.0	14.5	14.8	46.5	4.5	4.7	15.0	100.0
V3	0.1	0.0	76.8	0.1	23.0	0.0	0.0	100.0
T4	0.1	13.4	13.5	43.0	5.6	5.8	18.5	100.0
V4	0.7	0.0	70.9	0.1	28.3	0.0	0.0	100.0
H2	0.8	81.6	0.0	0.0	0.0	17.6	0.0	100.0

表—4 せん断中心におけるモード達成比(%)

	$\ddot{u}_x$	$\ddot{u}_y$	$\ddot{u}_z$	$\ddot{u}_{\theta x}$	$\ddot{u}_{\theta y}$	$\ddot{u}_{\theta z}$	$\ddot{u}_{\theta w}$	Total
T1	0.0	0.0	0.0	90.3	0.0	0.0	9.7	100.0
V1	0.8	1.2	89.0	0.0	8.9	0.1	0.0	100.0
T2	0.0	0.0	0.0	82.3	0.0	0.0	17.7	100.0
V2	8.5	0.0	76.2	0.0	15.2	0.0	0.0	100.0
H1	0.8	87.5	1.8	0.0	0.5	9.4	0.0	100.0
T3	0.0	0.0	0.0	75.6	0.0	0.0	24.4	100.0
V3	8.1	1.0	69.9	0.0	20.9	0.1	0.0	100.0
T4	0.0	0.0	0.0	69.9	0.0	0.0	30.1	100.0
V4	23.3	2.8	52.2	0.0	21.0	0.6	0.0	100.0
H2	27.7	43.2	14.2	0.0	5.7	9.4	0.0	100.0