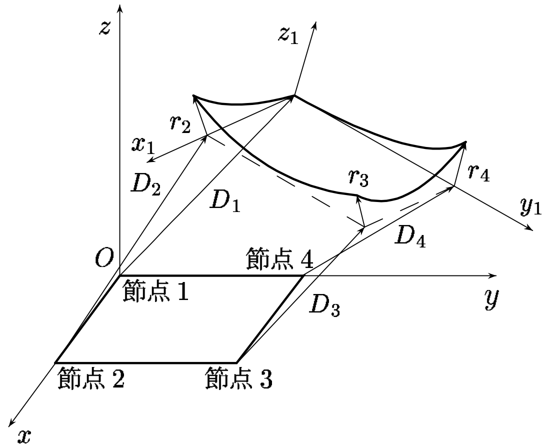
板の有限変位解析の一定式化

東北大学大学院工学研究科　○学生員　西原　照雅
東北大学大学院工学研究科　　正　員　岩熊　哲夫
東北大学大学院工学研究科　　正　員　後藤　文彦

1.　まえがき

近年，共回転座標などを用いて要素の剛体的な変位成分を取り除いた実質的な微小変形成分を線形理論の剛性方程式で評価するいわゆる剛体変位除去の手法が，シェルの有限変位解析にも適用されてきている．こうした剛体変位除去の手法では，局所座標系での剛性方程式の組み立ては簡単であるものの，要素の有限回転は適切に表現しなければならない．独立な三成分を用いて三次元の回転を表現する方法としては，回転疑似ベクトルやオイラー角を用いる方法などがあるが，それぞれ一長一短がある．また，剛体変位除去の手法において周知の線形剛性方程式を利用する場合，一般にその回転自由度成分および対応するモーメント外力成分は空間固定三軸回りの成分として定義されているため，回転疑似ベクトルでもオイラー角でもそのまま線形剛性方程式の回転自由度として用いることはできない．さて本研究では，座標変換行列にはオイラー角を用いつつも，接線剛性方程式の回転自由度には空間固定三軸回りの微小回転角を用いた板要素を定式化し，その精度を数値的に調べた．

2.　定式化



図–1　板要素

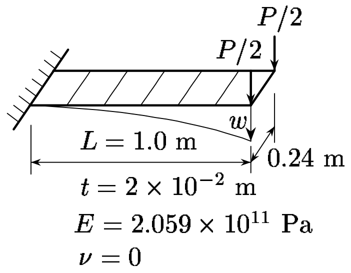
要素の節点変位を $\boldsymbol{d}$，節点 1 の変位に伴って要素が剛体的に移動したとしたときの節点変位を剛体変位 D と定義し，$\boldsymbol{d}$ の $\boldsymbol{D}$ に対する相対変位を $\boldsymbol{r}$ と定義する．節点外力 $\boldsymbol{f}$ のモーメント成分は空間固定三軸回りの成分として定義する．ここで，回転角成分に空間固定三軸回りの回転角を用いた節点変位を $\boldsymbol{d}$，オイラー角を用いたものを $\underline{\boldsymbol{d}}$ とする．また，局所系での表現は上付き添字 ℓ で表すこととする．要素の変形を無視できるならば，局所系での節点外力と全体系での節点外力は座標変換行列 $\boldsymbol{T}$ を用いて $\boldsymbol{f}^\ell = \boldsymbol{T}^T\boldsymbol{f}$ と関係付けることができる．同様に局所系での相対変位と全体系での相対変位は $\boldsymbol{r}^\ell = \boldsymbol{T}^T\boldsymbol{r}$ と関係付けることができる．この座標変換行列 $\boldsymbol{T}$ は有限な回転を表さなくてはならないのでオイラー角を用いて記述する．また，$\boldsymbol{r}$ は微小とみなすことができるので，線形理論の剛性行列を $\boldsymbol{K}$ とすると，局所系で $\boldsymbol{f}^\ell = \boldsymbol{K}\boldsymbol{r}^\ell$ の関係が成り立つ．ここで，線形剛性行列は同一寸法，同一形状の長方形平面応力要素と長方形板曲げ要素の各剛性行列を合成することにより得られる．なお，これらの剛性行列には θ_{zi} に対応した自由度がないので，仮想の回転剛性係数を導入する[1)]．以上の式から全体系での剛性方程式 $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{T}\boldsymbol{K}\boldsymbol{T}^T\boldsymbol{r}$ が得られる．これは $\underline{\boldsymbol{d}}$ に関する非線形方程式なので，弧長増分法を用いて解く．$\underline{\boldsymbol{d}}$ に関する増分を取ると，

$$
\begin{aligned}
\Delta\boldsymbol{f} &= \left[\frac{\partial\boldsymbol{T}}{\partial\underline{\boldsymbol{d}}}\boldsymbol{K}\boldsymbol{T}^T\boldsymbol{r} + \boldsymbol{T}\boldsymbol{K}\frac{\partial\boldsymbol{T}^T}{\partial\underline{\boldsymbol{d}}}\boldsymbol{r} + \boldsymbol{T}\boldsymbol{K}\boldsymbol{T}^T\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial\underline{\boldsymbol{d}}}\right]\Delta\underline{\boldsymbol{d}} \\
&= \boldsymbol{K}_t\Delta\underline{\boldsymbol{d}} \qquad (1)
\end{aligned}
$$

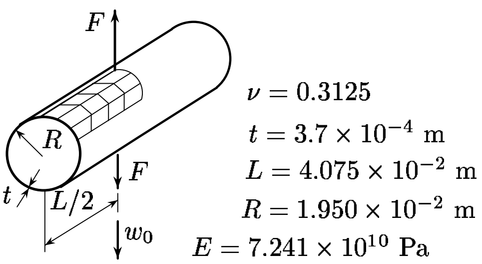
となる．ここで，$\Delta\underline{\boldsymbol{d}}$ の回転角成分はオイラー角で定義されているが，$\Delta\boldsymbol{f}$ のモーメント成分に対応するように空間固定三軸回りの成分 $\Delta\boldsymbol{d}$ に変換する．この変換式は幾何学的考察から導くことができ[2)]，変換行列 E を用いて $\Delta\underline{\boldsymbol{d}} = \boldsymbol{E}\Delta\boldsymbol{d}$ と書くことができる．これを式 (1) に代入すると，以下に示す最終的な接線剛性方程式が得られる．

$$
\Delta\boldsymbol{f} = \boldsymbol{K}_t\boldsymbol{E}\Delta\boldsymbol{d} = \overline{\boldsymbol{K}_t}\Delta\boldsymbol{d} \qquad (2)
$$

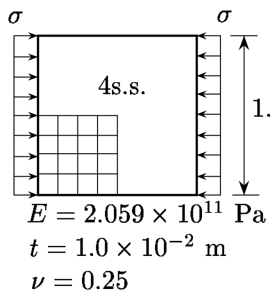
Key Words: 有限変位, オイラー角
〒980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 06, tel： 022-217-7443, fax： 022-217-7441



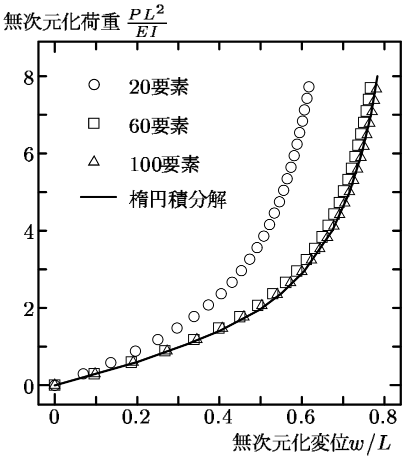
図–2 片持梁のエラスティカ



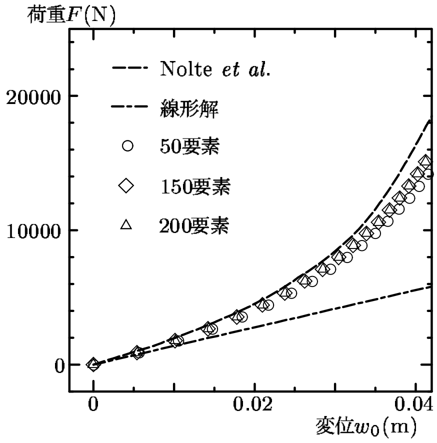
図–3 中央点に集中荷重を受ける円管



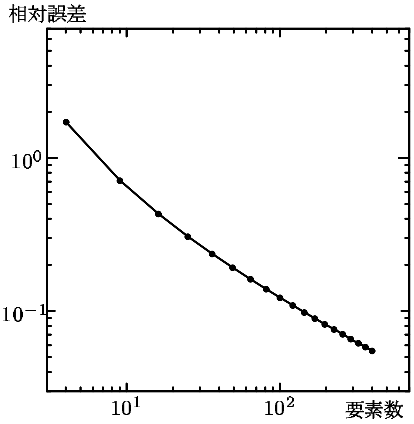
図–4 正方形板の座屈



図–5 片持梁のエラスティカ



図–6 中央点に集中荷重を受ける円管



図–7 正方形板の座屈

3. 片持梁のエラスティカ

はじめに，解析解の存在するエラスティカとの比較を行い，本定式化の収束性と精度を検証する．解析モデルは**図–2** に示すような自由端にせん断力を受ける片持梁とし，要素分割は部材軸方向にのみ行う．なお本定式化は薄板を対象としているが，一軸部材に対応するようにポアソン比を 0 として解析する．本解析の結果を楕円積分解とともに**図–5** に示す．要素分割を細かくするほど楕円積分解に近づき，100 分割で楕円積分解にほぼ収束した．

4. 中央点に集中荷重を受ける円管

図–3 に示すような中央点に集中荷重を受ける円管の荷重点における変位を求める．解析は**図–3** に示すように 1/8 領域について行い，解析モデルの要素分割は円管の長さ方向は 5 分割で固定し，円周方向の分割数を 10, 30, 40 とする．本解析の結果を線形解，Nolte[3]の曲面シェルによる数値解と併せて**図–6** に示す．本解析の結果は 150 要素で収束値に達している．本解析では解析モデルを折れ板で近似しているためか，Nolte の数値解と比較して 5% 程度の相対誤差があった．

5. 正方形板の座屈

図–4 に示すような周辺単純支持正方形板に一様な圧縮応力 σ が作用している場合の座屈応力 σ_{cr} を求める．解析は**図–4** に示すような 1/4 領域について，面内の 2 方向ともに等分割して行う．**図–7** に座屈応力の解析解に対する相対誤差と要素数との関係を両対数でプロットした図を示す．要素数が多い領域では直線分布となっていることから，本解析の座屈応力は解析解に収束していることが確認できる．

6. まとめ

剛体的な回転成分をオイラー角を用いた座標変換で表すことで，長方形要素の既存の線形剛性行列を利用した比較的簡単な定式化を提案した．いくつかの数値解析を行ったところ，要素分割を十分に細かく行えばある程度の精度が得られることが確認できた．

参考文献

1) O.C.Zienkiewicz : The Finite Element Method Third Edition, Mcgraw-Hill, London, 1977.
2) 後藤文彦, 小林裕, 岩熊哲夫 : オイラー角を用いた簡潔な有限変位解析手法, 構造工学論文集 Vol. 43A, 333-338, 1997.
3) Nolte, L.P. : On the Derivation and Efficient Computation of Large Rotation Shell Models, Finite Rotations in Structural Mechanics 1985, Lecture Notes in Engineering, Series 19, Springer-Verlag, 1986.