

線形計画法を用いた鋼製円錐型貯水槽の極限解析

日本工営（株）中央研究所 正会員 中野 雅章・師 自海・桜井 達朗

1. はじめに

静水圧下における円錐型貯水槽の構造安定性に関しては、ベルギーやカナダで起きた給水塔の崩壊事故を受けて実施された研究調査¹⁾や FEM に基づいた数値解析²⁾が代表的な研究として注目された。本稿では円錐型貯水槽の静水圧下における塑性限界状態について線形計画法 (LP) の問題として定式化し³⁾、その解の精度について文献から得た数値解析結果および実験結果と比較検討する。

2. 基本方程式および釣り合い式の離散化

図-1 に示すように、上端は自由、下端は単純支持されている円錐シェルを考える。ただし、ここでは円筒部についての議論は省略する。円錐型貯水槽は完全弾塑性を有する均質等方性の材料から成り、板厚と変位に関する薄肉シェルの微小変形理論の諸基本仮定が成り立つものとする。円錐シェルの壁は水圧以外に上部の水の自重 W を受けるため、圧縮力 $N_\theta = W/\cos\varphi$ を考慮する。図-2 に微小シェル要素に作用する外力、断面力および円錐座標系 (X_2 , θ , R_{12}) を示す。なお、圧縮力 N_θ については図-2 から除く。壁と直角方向に作用する荷重成分 $W\sin\varphi$ の増分 $dW\sin\varphi$ を外力として考慮すると、釣り合い式は次のようになる。

$$\frac{d^2 M_2}{dX_2^2} + \frac{N_{\theta 2}}{(R_1 \cos\varphi - X_2 \sin\varphi)} - \left(\frac{P_2}{\cos^2\varphi} + \frac{dW}{dX_2} \tan\varphi \right) = 0 \quad (1)$$

釣り合い式に関する離散化は中点差分法を採用する⁴⁾。無次元高さ $h_2=1$ の円錐シェルを、間隔 Δh_2 で N_2 等分し、区間 $[0, 1]$ において無次元モーメント m_2 の二次微分を差分で表すと、任意の節点 j における無次元釣り合い式(1)は次のようになる。

$$\frac{m_2^{j-1} - 2m_2^j + m_2^{j+1}}{\Delta h_2^2} + 2\alpha_2^j (n_{\theta 2}^j - \mu p_2^j) = 0 \quad j=1, N_2+1 \quad (2)$$

また、圧縮力 N_θ についての離散式は次のようになる。

$$n_m^j - \mu \frac{\bar{w}^j}{\cos\varphi} = 0 \quad j=1, \dots, N_2+1 \quad (3)$$

ここに、式 (2) の両端部の節点 0 とまたは N_2+2 は、差分法において使われるダミー点である。ここで、円錐型貯水槽の設計水位高さは H_1+H_2 とする。設計水位に対して、 μ は円筒シェルにおける水圧 $\bar{p}_1^j$ 、円錐シェルにおける水圧 $\bar{p}_2^j$ および前述した円環体内の水の自重 $\bar{w}^j$ に関する共通の荷重係数である。

3. 降伏条件および線形計画法に関する定式化

円錐シェルに関する降伏多面体を図-3 に示す。LP の問題として適用するためにこれらの降伏条件式をそれぞれ次式のように一般化応力 ($n_{\theta 1}$, m_1) に関する一次連立方程式に変換する必要がある⁵⁾。Zavelani-Rossi が考案した方法により、凸形降伏多角形は凸多面体の頂点 V_b と非負の中間変数 ξ_b を用いて線形関係で表すことが可能である。

$$Q_b^j = V_b^j \xi_b^j; \quad j=1, \dots, N_2+1 \quad (4)$$

線形計画法に基づく極限解析は塑性理論の下界定理を基盤としている。下界定理の下で塑性限界荷重を求めるために、力の釣り合い条件、降伏条件および境界条件の三者を満たす範囲において荷重係数 μ を最大化する。つまり、

$$\text{目的関数: } Z = \max[\mu] \quad \text{制約条件: 式(2)、(3)、(4)、境界条件。} \quad (5)$$

4. 数値解析結果および考察

(1) 解析条件

Vandepitte らの実験研究および El Damatty らの数値解析では、上部に円筒形キャップのない円錐シェルモデルを用いた。各ケースの寸法をおよび数値解析モデルを表-1 および (図-4) に示す。縦長貯水槽の 3 ケース (T1、T2 及び T3) の寸法は崩壊したカナダの貯水槽の寸法を参照している。降伏応力は $\sigma_y=300\text{Mpa}$ で

キーワード：鋼製円錐型貯水槽、静水圧下、極限解析、線形計画法

連絡先：〒300-1256 茨城県稲敷郡茎崎町稲荷原 2304 Tel.0298-71-2032 Fax.0298-71-2022

ある。なお、本解析においては数値計画法の汎用ソフト GAMS を用いた。

(2) 静水圧下における円錐シェルの塑性崩壊

LP による極限解析の結果および El Damatty らの FEM による極限解析の結果を図-5 に示す。同図には、El Damatty らが Vandepitte らの実験結果より求めた計 4 ケース (T1、T2、B1、B2) の初期不整のない完全円錐シェルにおける極限荷重係数も併せて示す。これらの結果から分かるように、数値解析アプローチの違いにより、極限荷重係数には最大約 20% 程度の相違が見られる。しかし、各アプローチの結果と実験結果とを比較すれば、LP 解析の精度は概ね良いと言える。また、極限状態における各節点の内力値のうち、経線方向の無次元曲げモーメント m_2 の符号に基づき円錐シェルの破壊形態を求めた塑性崩壊時の座屈発生箇所はカナダの貯水槽の破壊事故現場で目撃された破壊状況 (底板から約 0.6m 上で座屈) とほぼ一致した。(図-6)

参考文献

- 1) Vandepitte, D. et. al.: Experimental investigation of hydrostatically loaded conical shells and practical evaluation of the buckling load, *Buckling of shells*, E. Ramm, ed., Springer-Verlag KG, Berlin, Germany, 1982.
- 2) El Damatty, A. A., et. al.: Stability of imperfect steel conical tanks under hydrostatic loading, *J. Struct. Eng.*, Vol.123, No.6, 1997.
- 3) 師自海他: 線形計画法に基づく鋼製円すい型貯水槽の塑性崩壊に関する研究, 構造物の破壊過程解明に基づく地震防災性向上に関するシンポジウム論文集, 土木学会技術推進機構, 2000.
- 4) Tin-Loi, F. and Pulmano, V. A.: Limit loads of cylindrical shells under hydrostatic pressure, *J. Struct. Eng.*, Vol.117, No.3, 1991.
- 5) Hodge, P.G.: The rigid-plastic analysis of symmetrically loaded cylindrical shells, *J. Appl. Mech.*, Vol. 21, 1954.

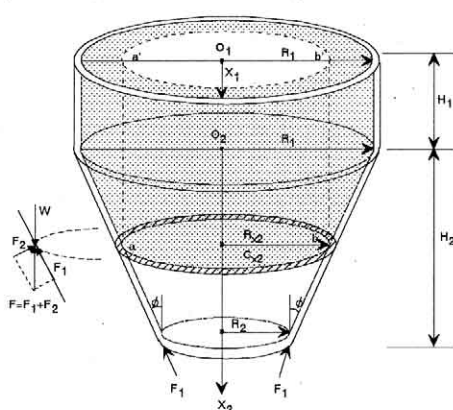


図-1 水の自重による断面力

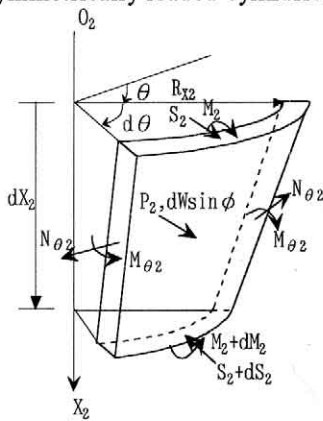


図-2 水圧および水の自重を受ける微小円すいシェル要素の釣り合い

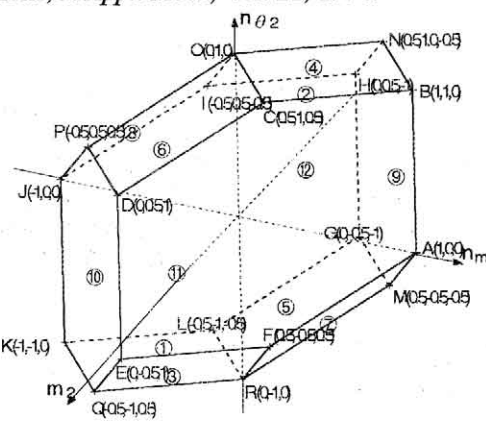
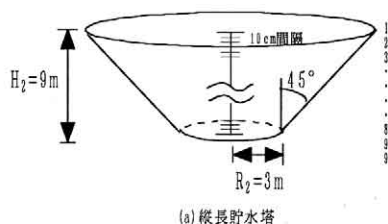


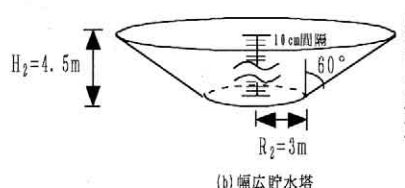
図-3 円すいシェルの降伏条件

表-1 解析ケース一覧

ケース	厚み (mm)	R_2 (m)	H_2 (m)	ϕ
T1	8.0	3.0	9.0	45°
T2	10.0	3.0	9.0	45°
T3	12.5	3.0	9.0	45°
B1	7.0	3.0	4.5	60°
B2	8.0	3.0	4.5	60°
B3	9.0	3.0	4.5	60°
B4	10.0	3.0	4.5	60°

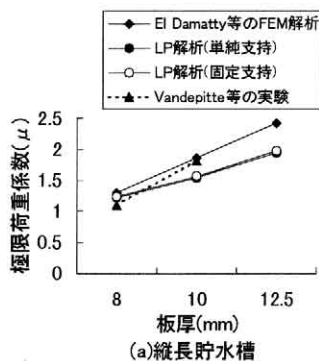


(a) 縦長貯水槽

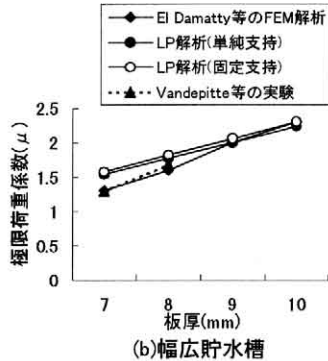


(b) 幅広貯水槽

図-4 差分法による円すいシェルの数値解析モデル



(a) 縦長貯水槽



(b) 幅広貯水槽

図-5 円すいシェルの極限荷重係数と板厚の関係

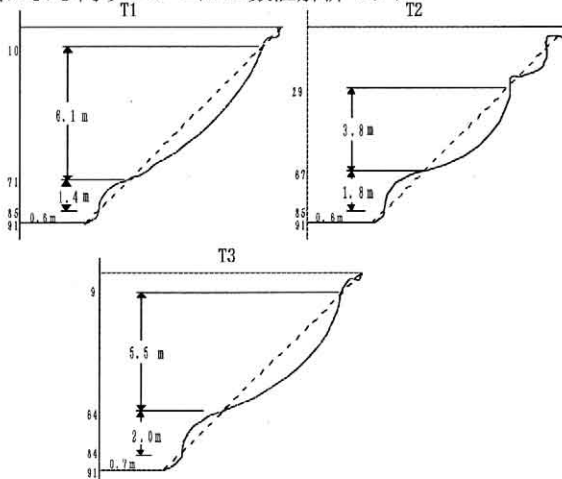


図-6 塑性崩壊時における破壊形態 (単純支持)