高速多重極Galerkin境界要素法によるクラック進展解析の考察

福井大学大学院　学生員　○　木畑　貴道
福井大学工学部　正会員　　　福井　卓雄

1　はじめに

本研究では高速多重極を用いたGalerkin境界要素法を使って等方等質弾性体中のクラックの進展解析の手法を提案し，多数のクラックが同時に進展する挙動を追跡することを目的とする。
これまでの問題点は

- 数のクラックを同時に進展させていったときに, 解析の精度が下がってしまう
- クラックの進展方向は一つではなく, n 個の独立な進展方向を決定するために, n 元の連立非線形方程式を解かなければならなかった

問題点の精度を向上させるために

- 未知方向を決定するのに, 応力拡大係数の条件 $k_{II}=0$ を使った。
- 線形要素による近似を行ない,Galerkin 法による境界要素法を導き, 高速多重極法を適用する。

2　Galerkin 境界要素法

2 次元空間中の領域 B とその境界 ∂B を考える。領域内部に複数の数学クラック $S_1,S_2,\cdots,S_M$ が含まれている平面ひずみ問題を考える。変位 u_i が領域内で Navier の方程式

$$G\left(u_{i,jj}+\frac{1}{1-2\nu}u_{j,ji}\right)+b_i=0 \qquad \text{in } B \tag{1}$$

Navier の方程式 (1) の基本特異解および第 2 基本特異解は次のように与えられる。

$$G_{ij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\frac{1}{8\pi(1-\nu)G}\left[(3-4\nu)\,\delta_{ij}\log\frac{1}{r}+r_{,i}r_{,j}-2(1-\nu)\,\delta_{ij}\right],\quad S_{ij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=T^{y}_{jk}G_{ki}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \tag{2}$$

クラックを含む領域 B を考えた場合、Somigliana の公式は
クラック面上の応力ベクトル s_i^+, s_i^- を求めると, $s_i^+-s_i^-=0$ であるから, クラック面上の点 $\boldsymbol{x}$ において

$$0=n_j\sigma^0_{ji}-\sum_K \mathrm{Pf}\int_{S_K}U_{ij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})[u_j](\boldsymbol{y})\,dS_y \tag{3}$$

が得られる。これらの式 (3) は境界積分方程式として使うことができる。
クラック表面の変位を線形要素, 境界応力を一定要素で近似する。また, クラック先端境界積分方程式 (3) の Galerkin 法による近似は

$$0=s_i^{0I}-\sum_K\left\{\sum_J F^{IJ}_{ij}[u_j]^J\right\}_K \tag{4}$$

となる。ここに, 影響関数 F^I_{ij}

$$F^I_{ij}(\boldsymbol{x})=\int_{\partial B}\int_{\partial B}U_{ij}(\boldsymbol{x};\boldsymbol{y})f^I(x)f^J(y)ds_x ds_y \tag{5}$$

が得られる。

キーワード: 線形要素 Galerkin 法
連絡先: 〒 910-8507 福井県福井市文京 3-9-1 福井大学工学部建築建設工学科, Tel. 0776-27-8596(直通), Fax. 0776-27-8746

3　高速多重極法

高速多重極をもちいるために

$$F_{ij}^I J = \int_{\partial B} f^I(x) T_{ik}^x \left[\int_{\partial B} S_{kj}(x,y) f^J(y) ds_y \right] ds_x \tag{6}$$

とする。z_0 に原点が移動すると $z=0 \rightarrow z-z_0=0$ となり, $\phi(z) \rightarrow \phi(z-z_0), \chi(z) \rightarrow \chi(z-z_0) - \overline{z_0}\phi(z-z_0)$ のように変換する。よって多重極展開は

$$\phi(z) = -M_0 \log z + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{M_n}{z^n}, \qquad \chi(z) = N_{-1} z \log z - N_0 \log z + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{N_n}{z^n} + C \tag{7}$$

で決定される。ここに, M_n, N_n は多重極の係数, C は変位および応力に関係しない定数である。今, (6) のカッコ内の積分は

$$\int_{\partial B} \phi(z, z_0) f^J(y) ds_y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n} \int_{\partial B} M_n(z_0) f^J(y) ds_y \tag{8}$$

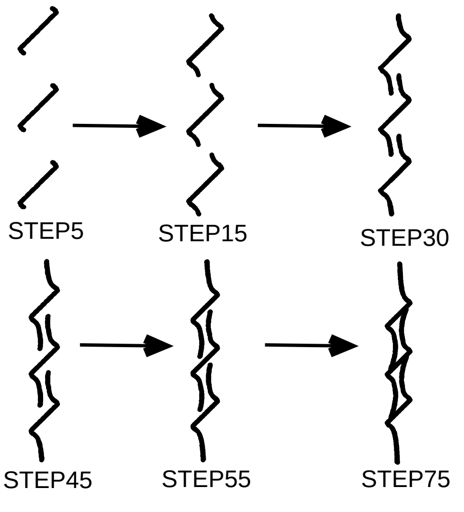
$$\int_{\partial B} \chi(z, z_0) f^J(y) ds_y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^n} \int_{\partial B} N_n(z_0) f^J(y) ds_y \tag{9}$$

である。よってカッコ内の積分は要素による影響関数の多重極展開を与える。これにより多重極の係数を計算することができる。

4　解析結果

今回の解析では, 複数のクラック先端が同時に進展したときの挙動を追跡することが目的であった。その結果,

- 今までの解析法では, クラックが伸びていくとある段階から不安定となっていたが, 今回の解析の結果, クラックがくいつくまで進展を追うことができた。
- 線形要素を用いたことにより解析の精度が上がった



図–1　圧縮応力下 $\sigma_y = -\sigma_0$ のクラック群の進展解析

参考文献

[1] 福井卓雄, 持田哲郎：高速多重極境界要素法の 2 次元静弾性問題への応用, 境界要素法論文集, **13** pp. 131–136, 1996.

[2] 福井卓雄, 本田作之助： Galerkin 境界要素法によるクラック群の進展解析土木学会中部支部平成 10 年度研究発表会講演概要集 **I-16** pp.41-42, 1999.