

3次元波動問題の高速多重極境界要素法による高速解法

福井大学大学院 学生員 ○ 稲津 恭介
福井大学工学部 正会員 福井 卓雄

はじめに

境界要素法を効率的に計算させる1つの工夫として高速多重極法を適用する手段がある。これまでもいくつかの問題において、境界要素法に高速多重極法を適用することによって効率化が成功してきた。本研究では、3次元 Helmholtz 方程式を支配方程式とする波動問題における高速多重極境界要素法を構成し、その計算効率を検討する。

3次元波動問題における境界要素法

3次元空間中の外部領域 B とその境界 ∂B を考え、この領域で Helmholtz 方程式の境界値問題

$$\nabla^2 u + k^2 u = 0 \quad \text{in } B, \quad u = \hat{u} \quad \text{on } \partial B_1, \quad \frac{\partial u}{\partial n} = \hat{s} \quad \text{on } \partial B_2 \quad (1)$$

を考える。ここに、 u は波動場であり、 k は波数である。また、 $\partial/\partial n$ は外向き法線微分を示す。この問題における波動場 u は、一般化された Green 公式により表される。

$$C(\mathbf{x})u(\mathbf{x}) = \tilde{u}(\mathbf{x}) + \int_{\partial B} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \frac{\partial u}{\partial n}(\mathbf{y}) ds_y - \int_{\partial B} S(\mathbf{x}, \mathbf{y}) u(\mathbf{y}) ds_y \quad (2)$$

ここに、 $\tilde{u}$ は入射波、 C は点 $\mathbf{x}$ の位置に依存するパラメータである。基本特異解、第2基本特異解は、それぞれ

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{e^{ik|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}}{4\pi|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}, \quad S(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\partial G(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial n_y} \quad (3)$$

となる。一般化された Green 公式 (2) によって与えられた方程式は、点 $\mathbf{x}$ が境界上にあるとき、未知の境界値に関する境界積分方程式となる。

3次元波動問題における高速多重極法

高速多重極アルゴリズムとは、対象とする場の多重極展開、局所展開およびそれらの係数間の変換関係を用いて、多数の波源により生成される波動場を効率良く計算させる方法である。本研究では、Epton と Dembart によって提案された関係式を用いて高速多重極法を構成する [1]。

多重極展開および局所展開を極座標 (r, θ, ϕ) を使って

$$u(\mathbf{x}) = \frac{ik}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n M_n^m h_n^{(1)}(kr) Y_n^m(\theta, \phi) = \frac{ik}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n M_n^m O_n^m(\mathbf{x}) \quad (4)$$

$$u(\mathbf{x}) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n L_n^m j_n(kr) Y_n^{-m}(\theta, \phi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n L_n^m I_n^{-m}(\mathbf{x}) \quad (5)$$

と表す。ここに、 j_n は第1種球 Bessel 関数、 $h_n^{(1)}$ は球 Hankel 関数であり、 I_n^m 、 O_n^m は Epton と Dembart によって導入された関数である。

$$I_n^m(\mathbf{x}) = j_n(kr) Y_n^m(\theta, \phi), \quad O_n^m(\mathbf{x}) = h_n^{(1)}(kr) Y_n^m(\theta, \phi) \quad (6)$$

キーワード：高速多重極境界要素法、3次元波動問題

連絡先：〒910-8507 福井市文京 3-9-1 福井大学工学部建築建設工学科, Tel/Fax. 0776-27-8596

また, Y_n^m は球面調和関数で

$$Y_n^m(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{(n-|m|)!}{(n+|m|)!}} (-1)^m P_n^{|m|}(\cos \theta) e^{im\phi} \quad (7)$$

と定義した。

次に, Epton と Dembart に従えば, 関数 $Q_n^m = O_n^m$ (または I_n^m) および I_n^m に対して, 加法定理

$$Q_n^m(\mathbf{x} + \mathbf{a}) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{j=-l}^l \sum_{n'=0}^{\infty} \sum_{m'=-n'}^{n'} \frac{(2n+1)(2n'+1)}{4\pi} i^{n+n'-l} E \begin{pmatrix} m & m' & -j \\ n & n' & l \end{pmatrix} I_{n'}^{-m'}(-\mathbf{a}) Q_l^j \quad (8)$$

が成り立つ。ここに, $E()$ は, 球面調和関数の単位球面上における積分

$$E \begin{pmatrix} i & j & k \\ l & m & n \end{pmatrix} = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\phi=0}^{\pi} Y_l^i(\theta, \phi) Y_m^j(\theta, \phi) Y_n^k(\theta, \phi) \sin \theta d\theta d\phi \quad (9)$$

で定義される。

加法定理 (8) を利用すれば, 多重極点の移動 (M2M), 多重極展開の局所展開への変換 (M2L), 局所展開点の移動 (L2L) による係数の変換関係はそれぞれ, 次のようになる。

$$\tilde{M}_n^m = \sum_{n'=0}^{\infty} \sum_{m'=-n'}^{n'} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{j=-l}^l \frac{(2n+1)(2n'+1)}{4\pi} i^{n+n'-l} E \begin{pmatrix} -m & m' & j \\ n & n' & l \end{pmatrix} I_{n'}^{-m'}(\mathbf{a}) M_l^j \quad (10)$$

$$L_n^m = \sum_{n'=0}^{\infty} \sum_{m'=-n'}^{n'} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{j=-l}^l (-1)^{n'+m'} \frac{(2n+1)(2n'+1)}{4\pi} i^{n+n'-l} E \begin{pmatrix} m & -m' & -j \\ n & n' & l \end{pmatrix} O_{n'}^{m'}(-\mathbf{a}) M_l^j \quad (11)$$

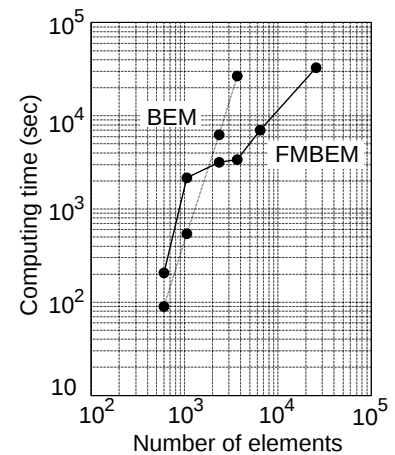
$$\tilde{L}_n^m = \sum_{n'=0}^{\infty} \sum_{m'=-n'}^{n'} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{j=-l}^l \frac{(2n+1)(2n'+1)}{4\pi} i^{n+n'-l} E \begin{pmatrix} -m & m' & j \\ n & n' & l \end{pmatrix} I_{n'}^{-m'}(\mathbf{a}) L_l^j \quad (12)$$

多重極展開 (4), 局所展開 (5) および係数間の変換関係 (10), (11), (12) を用いて高速多重極法を構成することができる。

計算効率

本手法は, 境界積分方程式 (2) を離散化して解く過程において, 反復法を用い, 反復法の実行に必要な行列ベクトル積を高速多重極法を用いて計算を高速に実行させようとするものである。

計算効率の確認のために無限領域内の球散乱体 (半径 a) による散乱問題の解析を行なった。無次元波数 $ka = 1$ としている。要素数に対する解析時間 (右図) は $O(N)$ 程度の増加を示し, 要素数が 11,000 あたりから従来の境界要素法よりも高速に計算されている。また, 波動問題における高速多重極法では計算に必要な展開項数が波数に依存している。したがって, 波数が大きな問題では項数が大きくなる。この問題を解決する手段として diagonal form を利用した係数変換が Rokhlin により提案されている [2]。今後の課題として, この diagonal form を用いた高速多重極法の構成が必要である。



参考文献

- [1] Epton, M.A. and B. Dembart : Multipole taranslation theory for the three-dimensional Laplace and Helmholtz equations, *SIAM J. Sci. Comput.*, **16**, pp. 865-897, 1995.
- [2] Rokhlin, V : Diagonal forms of translation operators for the Helmholtz equation in three-dimensions, *Appl. Comput. Harmonic Anal.*, **1**, pp. 82-93, 1993.