

区分的に値を持つ基底ベクトルを用いた逆べき乗法の改良法

熊本工業大学 工学部 正会員 片山拓朗
 熊本工業大学 工学部 正会員 平井一男
 九州東海大学 工学部 正会員 柏木光博

1. まえがき

逆べき乗法は連立方程式を繰り返し解くことにより係数行列のスペクトル特性を利用して低次の固有値・固有ベクトルを求める方法であり、大型疎行列の固有値問題において有効な解法の一つである。ただし、収束性と安定性もまた係数行列のスペクトル特性に依存する。本研究では、区分的に値を持つ基底ベクトルを用いた固有ベクトルの再構成法とこの基底ベクトルを逐次作り出す連立方程式の反復解法を提案する。数値計算の結果、提案法は従来のべき乗法に比べて高い収束性と安定性を有していることを確認した。

2. 区分的に値を持つ基底ベクトルによる部分空間近似

有限要素法等で離散化された全体領域 W (図1)と領域 W で定義される行列の固有値問題

$$Ax = Ix \quad (1)$$

を考える。ここに、 A は n 次正値対称行列、 x は n 次列ベクトル、 I はスカラーとする。領域 W を m 個の部分領域 W_1, W_2, \dots, W_m (図2) に区分し、領域 W_i 内の n_i 個の自由度: $v_{i,j} \in W_i, j=1,2,\dots,n_i$ を成分に持つベクトル \bar{v}_i と \bar{v}_i を全体領域に展開したベクトル \hat{v}_i をそれぞれ(2), (3)式で定義する。特に \hat{v}_i を区分的に値を持つ基底ベクトルと呼ぶ。また、各部分領域の自由度数 n_i の総和は n である。

$$\bar{v}_i^T \equiv [v_{i,1}, v_{i,2}, \dots, v_{i,n_i}] \text{-----} (2), \quad \hat{v}_i^T \equiv [0, \dots, 0, \bar{v}_i^T, 0, \dots, 0] \text{-----} (3)$$

各領域 W_i において ℓ_i 個の線形独立なベクトル: $\bar{v}_{i,1}, \bar{v}_{i,2}, \dots, \bar{v}_{i,\ell_i}$ が与えられ、これらを成分に持つベクトル: $\hat{v}_{i,1}, \hat{v}_{i,2}, \dots, \hat{v}_{i,\ell_i}$ からなる部分空間を

$$\hat{V}_i = [\hat{v}_{i,1}, \hat{v}_{i,2}, \dots, \hat{v}_{i,\ell_i}] \text{-----} (4), \quad V = [\hat{V}_1, \hat{V}_2, \dots, \hat{V}_m] \text{-----} (5)$$

と表す。 V の張る部分空間での固有ベクトルの最良近似 $\tilde{x} = Vy$ は固有値問題

$$V^T A V y = I V^T V y \quad (6)$$

を解くことにより得られる。 V を張る基底ベクトルが求めたい固有ベクトルと区分的に近いとき、少ない基底数で固有ベクトルを近似することが可能となる。

3. 逆べき乗法における近似固有ベクトルの再構成

反復 s における固有ベクトル x_t の近似固有ベクトルを $x_t^{(s)}$ とすると、逆べき乗法の反復式は

$$A u = x_t^{(s)} \text{-----} (7), \quad x_t^{(s+1)} = u / \|u\| \text{-----} (8)$$

と表される。 $x_t^{(s)}$ が固有ベクトルの線形結合として(9)式で表せるなら、 u は固有値 I_1, I_2, \dots, I_n を用いて(10)式で表される。

$$x_t^{(s)} = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n \text{-----} (9), \quad u = \frac{a_1}{I_1} x_1 + \frac{a_2}{I_2} x_2 + \dots + \frac{a_n}{I_n} x_n \text{-----} (10)$$

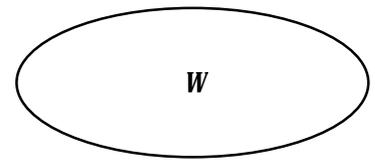


図1 全体領域 W

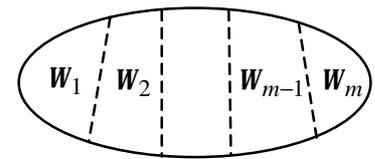
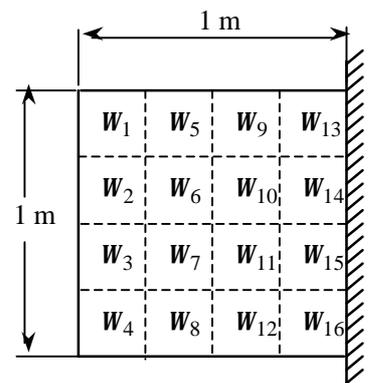


図2 部分領域 W_i



ヤング率: $2.0 \times 10^8 \text{ kN/m}^2$
 板厚: 0.01m
 ポアソン比: 0.3
 領域数: $m=16$

図3 平面応力問題の例題

ここで、互いに独立な部分空間 V, W が存在し

$$\mathbf{x}_t^{(s)} = V\mathbf{b} \text{ ----- (11),} \quad \mathbf{u} = V\mathbf{c} + W\mathbf{d} \text{ ----- (12)}$$

と表せるなら、部分空間 W は(9)式から(10)式への固有ベクトルの成分変化を表す空間と考えられる。提案法では、反復ベクトルとして \mathbf{u} の代わりに V, W の張る部分空間における固有ベクトルの最良近似

$$\mathbf{x}_t^{(s+1)} = V\mathbf{y}_t + W\mathbf{z}_t, \text{ (13)}$$

を用いる。係数ベクトル $\mathbf{y}_t, \mathbf{z}_t$ は(14)式の部分空間の固有値問題を満たす固有ベクトルである。収束判定は(15)式で行う。 \mathbf{e}_a は収束判定値である。

$$\begin{bmatrix} V^T AV & V^T AW \\ W^T AV & W^T AW \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{y}_t \\ \mathbf{z}_t \end{bmatrix} = \mathbf{I}_t^{(s+1)} \begin{bmatrix} V^T V & V^T W \\ W^T V & W^T W \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{y}_t \\ \mathbf{z}_t \end{bmatrix} \text{ (14)}$$

$$\mathbf{e}_t = \left\| A\mathbf{x}_t^{(s+1)} - \mathbf{I}_t^{(s+1)}\mathbf{x}_t^{(s+1)} \right\| / \left\| A\mathbf{x}_t^{(s+1)} \right\| \leq \mathbf{e}_a \text{ (15)}$$

4. 連立方程式： $A\mathbf{u} = \mathbf{x}_t^{(s)}$ の反復解法

(7)式の近似解を

$$\mathbf{u}^{[k]} = V\mathbf{c}^{[k]} + W\mathbf{d}^{[k]} \text{ (16)}$$

と置く。ここに、 $[k]$ は(7)式を解く際の反復回数を示す。 V, W は区分的に値を持つ基底ベクトルからなる互いに独立な部分空間で、 V は(11)式を満たす。係数ベクトル $\mathbf{c}^{[k]}, \mathbf{d}^{[k]}$ は(17)式の部分空間の連立方程式を満たすものとする。

$$\begin{bmatrix} V^T AV & V^T AW \\ W^T AV & W^T AW \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{c}^{[k]} \\ \mathbf{d}^{[k]} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V^T \mathbf{x}_t^{(s)} \\ W^T \mathbf{x}_t^{(s)} \end{bmatrix} \text{ (17)}$$

$\mathbf{u}^{[k]}$ の残差ベクトル $\mathbf{r}^{[k]}$ を領域 W_1, W_2, \dots, W_m に対応させて(18)式で定義する。各領域毎に残差ノルムの評価を例えば(19)式で行う。

$$\mathbf{r}^{[k]} \equiv [\bar{r}_1^{[k]}, \bar{r}_2^{[k]}, \dots, \bar{r}_m^{[k]}] = \mathbf{x}_t^{(s)} - A\mathbf{u}^{[k]} \text{ (18)}$$

$$\mathbf{m}_i = \left\| \bar{r}_i^{[k]} \right\| \leq \mathbf{m}_a \frac{n_i}{n} \left\| \mathbf{x}_t^{(s)} \right\| \text{ (19)}$$

ここに、 \mathbf{m}_a は収束判定値である。(19)式を満たさない領域においては基底ベクトルが不足しているので基底ベクトルを追加する必要がある。そこで、(20)、(21)、(22)式を用いて新しい基底を作る。 A_{ij} は係数行列 $A = (A_{ij})$ を構成するブロック行列の対角ブロックである。(22)式の $\hat{w}_{i,k+1}$ を \hat{W}_i に追加して $\hat{W}_i = [\hat{W}_i, \hat{w}_{i,k+1}]$ とする。各領域の基底を集めて $W = [\hat{W}_1, \hat{W}_2, \dots, \hat{W}_m]$ とすると拡大された部分空間が得られる。この拡大された W と V の張る部分空間で \mathbf{u} の最良近似を(16)式と(17)式で求め直す。以上の操作を残差ノルムが全ての領域で許容値以下になるまで繰り返すと(12)式を満たす部分空間 W が得られる。

$$A_{ii} \bar{q}_i^{[k]} = \bar{r}_i^{[k]} \text{ ----- (20),}$$

$$\bar{w}_{i,k+1} = \bar{q}_i^{[k]} / \left\| \bar{q}_i^{[k]} \right\| \text{ ----- (21),}$$

$$\hat{w}_{i,k+1}^T = [0, \dots, 0, \bar{w}_{i,k+1}^T, 0, \dots, 0] \text{ ----- (22)}$$

5. 数値計算とまとめ

提案法の有効性を検証するため、図3に示す正方領域の一边が固定された平面応力問題を取り上げ、有限要素法で離散化して得られる剛性行列の低次の固有値・固有ベクトルを求める問題について数値実験を行った。表1に $127 \times 127 = 16129$ 個の正方形要素で離散化したときの低次(5個)の固有値を示す。自由度数は32512個である。図4に低次の5個の固有値・固有ベクトルを求めたときの(7)式の連立方程式を解いた回数と(15)式で示す相対残差ノルムの関係を示す。収束判定値は $\mathbf{e}_a = 10^{-7}$ とした。部分領域は図3に示す16領域とした。図4より、各固有ベクトルとも収束率は高く、安定に収束していることが分かる。詳細については講演時に報告する。

表1 剛性行列の固有値

要素数：16129

自由度数：32512

番号	固有値(kN/m)
1	52.603812
2	304.687959
3	380.751204
4	941.799523
5	1125.009406

- 1次
- ◇—2次
- 3次
- △—4次
- ×—5次

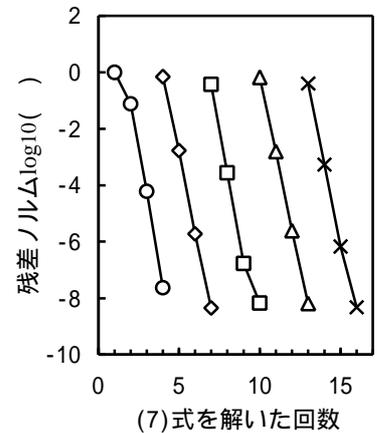


図4 残差ノルムの変化