

# 線長ポテンシャル関数による単層曲面の形態解析とその力学特性

佐賀大学大学院 学生会員 森禎道  
佐賀大学都市工学科 正会員 井嶋克志  
佐賀大学都市工学科 正会員 帯屋洋之  
佐賀大学都市工学科 正会員 川崎徳明

## 1.はじめに

膜・ケーブル曲面構造，RC シェル曲面構造などは，その構造材料に応じてせん断力の発生しない張力のみ，あるいは圧縮力のみによる平衡形状を合理的な初期形状とする。この形態解析には実構造材料の剛性は関係なく，寧ろ平衡形状を得るためには無応力長が影響しない軸力のみ有する仮想部材を使用したほうが，初期仮定形状の影響を受けることなく合理的構造曲面を決定できる。本研究は，仮想部材の線長の関数によって表わされるポテンシャルを使用した単層曲面形状の決定法と，設定したポテンシャルとその平衡曲面の力学的特性について検討したものである。

## 2.解析理論

軸力部材のポテンシャル  $P$  を式(1)のように定義すれば，その軸力  $N$  は式(2)によって表される。

$$P = C l^n \quad \dots\dots (1) \qquad N = \frac{\partial P}{\partial l} = n C l^{n-1} \quad \dots\dots (2)$$

ここに， $l$  は部材長， $C$  と  $n$  は定数である。

部材両端の節点力ベクトルを  $\mathbf{U}_i, \mathbf{U}_j$ ，部材の方向余弦を  $\mathbf{a}$  とすれば，平衡条件式は，

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{U}_i \\ \mathbf{U}_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\mathbf{a} \\ \mathbf{a} \end{Bmatrix} N \quad \dots\dots (3)$$

式(3)を満足する節点座標位置，軸力を求めればよい。通常，この解析は非線形解析となり，式(3)の微小増分としての次の接線剛性方程式を用いることになる。

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \delta \mathbf{U}_i \\ \delta \mathbf{U}_j \end{Bmatrix} &= \left\{ n(n-1)C l^{n-2} \begin{bmatrix} \mathbf{a}\mathbf{a}^T & -\mathbf{a}\mathbf{a}^T \\ -\mathbf{a}\mathbf{a}^T & \mathbf{a}\mathbf{a}^T \end{bmatrix} + \frac{N}{l} \begin{bmatrix} \mathbf{e} - \mathbf{a}\mathbf{a}^T & -\mathbf{e} + \mathbf{a}\mathbf{a}^T \\ -\mathbf{e} + \mathbf{a}\mathbf{a}^T & \mathbf{e} - \mathbf{a}\mathbf{a}^T \end{bmatrix} \right\} \begin{Bmatrix} \delta \mathbf{u}_i \\ \delta \mathbf{u}_j \end{Bmatrix} \\ &= n C l^{n-2} \begin{bmatrix} \mathbf{e} + (n-2)\mathbf{a}\mathbf{a}^T & -\mathbf{e} - (n-2)\mathbf{a}\mathbf{a}^T \\ -\mathbf{e} - (n-2)\mathbf{a}\mathbf{a}^T & \mathbf{e} + (n-2)\mathbf{a}\mathbf{a}^T \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta \mathbf{u}_i \\ \delta \mathbf{u}_j \end{Bmatrix} \quad \dots\dots (4) \end{aligned}$$

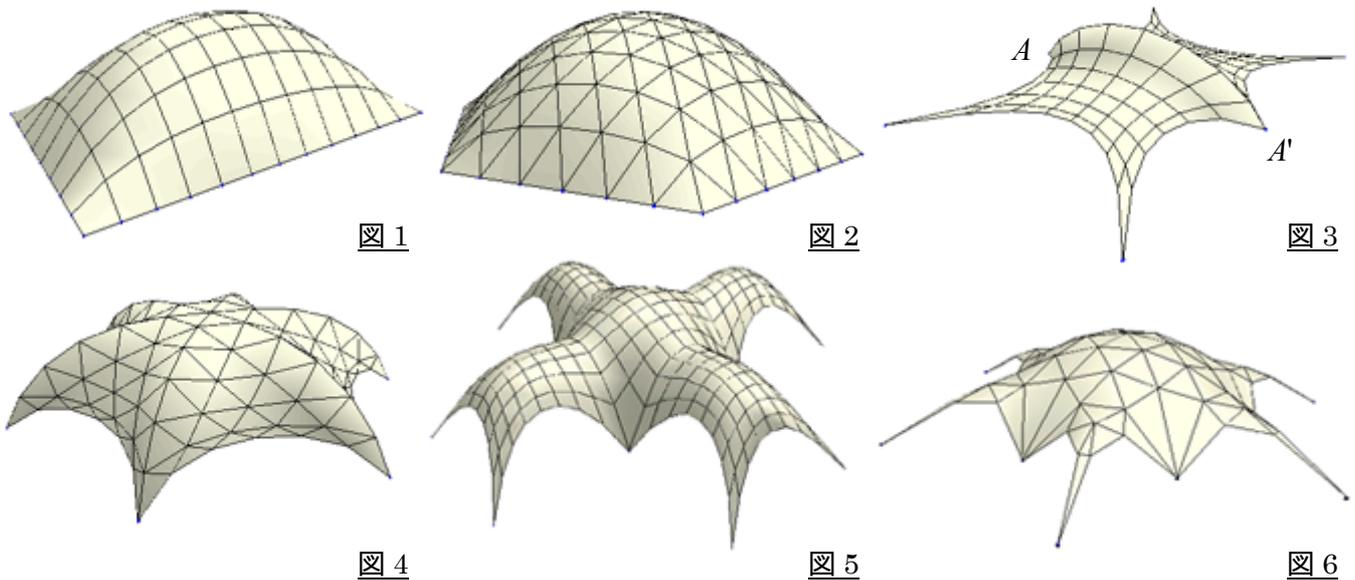
ここに， $\mathbf{e}$  は  $3 \times 3$  の単位マトリクス， $\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j$  である。

式(4)の第1項が要素剛性に関わる剛性マトリクス，第2項が幾何剛性である。両方の剛性マトリクスを合わせたマトリクスから， $n=2$  のとき，接線幾何剛性マトリクスは節点座標および部材長に関係しない接線幾何剛性マトリクスとなることが判る。すなわち，部材が線長の2乗で表されるポテンシャルを持つとき，軸力部材で構成される形態解析の問題は線形解析となる。したがって，初期仮定形状における式(4)の左辺の不均衡力のもとに，発生する増分変位は有限であるにもかかわらず，線形解析によって平衡節点位置を決定できる。 $n=2$  の場合は，Force density 法として知られているが，得られた形状の次のような力学的利点について述べた研究は見あたらない。

すなわち、比例定数  $C$  を一定として  $n=2$  によって得られる形状は、曲面の面外方向への剛性が各節点で一定となる。すなわち、実構造物を得られた形状に張り付けたとき、接線幾何剛性は式(4)の要素剛性に関わる第1項のみが変わり、要素が有する平衡時の軸力による幾何剛性は変化しない。 $n=2$  のとき、 $N/l=C$  一定であるから、各節点に接合される部材数が均一であれば、各節点は面外方向に均一な剛性を持つことになる。膜構造によく用いられる石鹸膜曲面は等張力によってその平衡形状を維持し、この曲面の幾何剛性も全て均一であるから、 $n=2$  によって得られる曲面は、その力学的性質として石鹸膜曲面と等価であると言える。

$n=1$  のとき、軸力は線長に関わらず常に一定となる、全軸力一定曲面を形成する。本形態解析法はポテンシャルを最小とする問題であるから、 $n=1$  のときは部材長の総和を最小とすることになるが、部材長のばらつきが大きく、境界条件や荷重条件によっては解が得られない場合も多い。一方、 $n=2$  の平衡形状は各部材長の2乗和を最小とする形状であるから、部材長間のばらつきは小さくなる。

なお、本解析法では  $C$  の正負によって各部材の圧縮と引張を設定することが出来る。



### 3 形態解析の計算例

$n=2$  を用いた形態解析を行い、支点条件や比例定数  $C$  をかえることにより、様々な平衡形状を求め、その計算結果の例を図1から図6に示している。

図1は  $8 \times 12\text{m}$  の矩形の周辺を固定し、部材はすべて比例定数  $C = -1$  の圧縮部材を用いている。荷重は単位投影面積あたりの一定分布荷重  $W = -0.5 \text{ kgf/m}^2$  を鉛直下方向にかけている。図2は1辺6mの正六角形の周辺を固定し、全部材に  $C = -1$  の圧縮部材を用い、 $W = -0.5 \text{ kgf/m}^2$  の荷重をかけている。図3と図4の平衡形状は引張り部材と圧縮部材で構成されている。図3では矩形の隅角部4点と、 $A$ 点、 $A'$ 点を固定し、 $A$ 点と $A'$ 点の間に  $C = -4$  の圧縮部材、他の部材には  $C = 1$  の引張り部材を用い、 $W = -0.07 \text{ kgf/m}^2$  の荷重をかけている。図4は正六角形の隅角部6点を固定し、正六角形の対角線に  $C = -10$  の圧縮部材、他の部材には  $C = 1$  の引張り部材を用い、荷重は  $W = -1.0 \text{ kgf/m}^2$  をかけている。図5は十字型の角部を固定し、角部同士を結ぶ部材に  $C = -2$  の圧縮部材、他の部材に  $C = -1$  の圧縮部材を用いている。荷重は  $W = -0.5 \text{ kgf/m}^2$  である。図6は6個の鋭角をもつ星形の角部を固定し、部材はすべて  $C = -1$  の圧縮部材を用い、荷重は  $W = -0.5 \text{ kgf/m}^2$  をかけている。

### 参考文献

- 1) 井嶋克志, 後藤茂男: "Equilibrium shape analysis of single layer structure by measure potential function" Structural Engineer and Mechanics. Vol.5, No.6, pp.775-784, 1997