

Differential Quadrature 法を用いた変厚長方形板の振動解析

大同工業大学 正員 近藤八重
(株)日本技術開発名古屋支社 正員 高木信治
大同工業大学 正員 水澤富作

1. はじめに Bellman らにより提案された Differential Quadrature 法 (DQ 法) は, 偏微分方程式を数値的に解く解法として, 多くの分野で用いられている¹⁾. 構造解析への適用は, 比較的新しく, 1988 年の Bert らの研究が挙げられる. DQ 法は, 変位関数の導関数を領域に設けた全ての離散点での関数値の重み付き線形和として表される数値補間多項式により近似し, 支配方程式を線形代数方程式に置き換える手法である. 本文では, Lagrange 多項式を補間関数に用いた DQ 法²⁾の変厚長方形板の振動解析への適用について検討を行っている. また, 本手法の収束性や解析精度について示す.

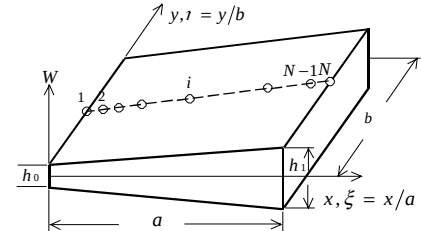


図 - 1 変厚長方形板と座標系

2. 解析手法

2.1 DQ 法 DQ 法では, 次式で表される関数 $w(\xi)$ の離散点 i での r 階の導関数は, 図 - 1 に示す解析領域に設けた全ての離散点での関数値の重み付き線形和で表される $d^{(r)}w(\xi_i)/d\xi^r = \sum_{j=1}^N A_{ij}^{(r)} w_j; j, i = 1, 2, \dots, N$ (1) ここで, $A_{ij}^{(r)}$ は r 階の導関数の重み係数行列であり, N は ξ 軸方向に設けられた離散点の数である. 1 階の重み係数行列は, Lagrange 補間多項式 $\Gamma_i(\xi)$ を用いれば, 次式で与えられる.

$$A_{ik}^{(1)} = \frac{\Gamma_i(\xi_k)}{(\xi_i - \xi_k) \Pi(\xi_k)}; k \neq i, i, k = 1, 2, \dots, N \quad (2) \quad \text{ここで } \Pi(\xi_i) = \prod_{v=1, v \neq i}^N (\xi_i - \xi_v), \Pi(\xi_k) = \prod_{v=1, v \neq k}^N (\xi_k - \xi_v); i = 1, 2, \dots, N \quad (3)$$

また, r 階の重み係数行列は, 次式で与えられる漸化式を用いれば, 式(2)で求めた $A_{ik}^{(1)}$ より, 次式で表される. すなわち, $2 \leq r \leq (N-1)$ に対して, $A_{ik}^{(r)} = r \left[A_{ii}^{(r-1)} A_{ik}^{(1)} - \frac{A_{ik}^{(r-1)}}{(\xi_i - \xi_k)} \right]; k \neq i, i, k = 1, 2, \dots, N \quad \dots (4)$

また, $1 \leq r \leq (N-1)$ に対して, 重み係数行列の対角要素は, $A_{ii}^{(r)} = - \sum_{v=1, v \neq i}^N A_{iv}^{(r)}; i = 1, 2, \dots, N \quad (5)$ から求められる

2.2 DQ 法を用いた定式化

x - 方向に変厚である長方形薄板の自由振動方程式は, 次式で表される.

$$D \nabla^2 \nabla^2 w + 2 \frac{dD}{dx} \frac{\partial}{\partial x} (\nabla^2 w) + \frac{d^2 D}{dx^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = \rho h \omega^2 w \quad \dots (6)$$

ここで, $\nabla^2 = \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2$ であり, ρ, a はそれぞれ, 密度と円振動数である. また, 板の曲げ剛性 D は, 板厚を $h = h_0 H(x)$ とおくと, $D = D(x) = \frac{E h_0^3}{12(1-\nu^2)} H(x)^3 = D_0 H(x)^3$ になる. 次式の無次元直交座標系を用いて, 式(6)を書き換えると, $\xi = x/a, \eta = y/b \quad \dots (7)$,

$$G(\xi) \left[\frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4} + 2(a/b)^2 \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} + (a/b)^4 \frac{\partial^4 w}{\partial \eta^4} \right] + 2 \frac{dG(\xi)}{d\xi} \left[\frac{\partial^3 w}{\partial \xi^3} + (a/b)^2 \frac{\partial^3 w}{\partial \xi \partial \eta^2} \right] + \frac{d^2 G(\xi)}{d\xi^2} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \nu (a/b)^2 \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} \right] = \frac{\rho h_0 a^4}{D_0} \omega^2 H(\xi) w \quad (8)$$

ただし, $G(\xi) = H(\xi)^3$ である. ここで, x - 軸に平行な 2 辺が単純支持されていると仮定すると, Levy 法を適用すれば, たわみ w は次式で表すことができる. $w = \sum W \sin m\pi \eta \quad \dots (9)$

$$G(\xi) \left[\frac{d^4 W}{d\xi^4} - 2(a/b)^2 (m\pi)^2 \frac{d^2 W}{d\xi^2} + (a/b)^4 (m\pi)^4 W \right] + 2 \frac{dG(\xi)}{d\xi} \left[\frac{d^3 W}{d\xi^3} - (a/b)^2 (m\pi)^2 \frac{dW}{d\xi} \right] + \frac{d^2 G(\xi)}{d\xi^2} \left[\frac{d^2 W}{d\xi^2} - \nu (a/b)^2 (m\pi)^2 W \right] = \frac{\rho h_0 a^4}{D_0} \omega^2 H(\xi) W \quad \dots (10)$$

キーワード: DQ 法, 変厚板, 振動解析

〒457 - 8532 名古屋市南区白水町 40 番地

TEL. 052 - 612 - 5571

FAX. 052 - 612 - 5953

したがって、DQ法を用いれば、式(10)は

$$G(\xi_i) \left[\sum_{j=1}^N A^{(4)} W_j - 2(a/b)^2 (m\pi)^2 \sum_{j=1}^N A^{(2)} W_j + (a/b)^4 (m\pi)^4 W_i \right] + 2 \frac{dG(\xi_i)}{d\xi} \left[\sum_{j=1}^N A^{(3)} W_j - (a/b)^2 (m\pi)^2 \sum_{j=1}^N A^{(1)} W_j \right] \\ + \frac{d^2 G(\xi_i)}{d\xi^2} \left[\sum_{j=1}^N A^{(2)} W_j - \nu(a/b)^2 (m\pi)^2 W_i \right] = n^{*2} H(\xi_i) W_i \quad ; i=3,4,\dots,N-2, \quad \dots (11)$$

ただし、 $n^* = \omega a^2 \sqrt{\rho h_0 / D_0}$ である。DQ法を用いて、同様に y - 軸に平行な 2 辺の境界条件も定式化できる。変厚板の振動方程式 (N-4 の方程式) と境界条件式 (4 つの方程式) からなるシステム方程式が求められる。ここでは、境界条件式を解いて、これを振動方程式に代入して、(N-4)x(N-4) の固有値解析を行っている。

2.3 変断面性状 x - 方向の板厚は、次式のように連続的に任意に変化できる。

(i) 凸断面: $h(\xi) = h_0 [\delta - (\delta - 1)(1 - \xi)^n] = h_0 H(\xi)$, (ii) 凹断面: $h(\xi) = h_0 [1 - (1 - \delta)\xi^n] = h_0 H(\xi)$

ここで、 $\delta = h_1 / h_0$ 、また変厚断面を n 次の多項式で仮定し、n が 1 の場合は、直線的に変化する。

3. 数値計算例および考察 ここでは、半解析的な DQ 法の収束性や解析精度について示す。y 軸に平行な 2 辺の境界条件は、C - F, S - C などで表し、x = 0 で固定 C または単純支持辺 S, x = a で自由 F または固定辺を示す。重み係数行列を求めるために必要になる離散点は、直交多項式の根である Chebyshev の解を座標に用いている。表 - 1 は、板厚が直線的に変化する正方形板 (C - C) の振動数パラメータ、 $n^* = \omega a^2 \sqrt{\rho h_0 / D_0}$ の収束性に与える離散点の数, N の影響を示している。ここで、変厚比 $\delta = h_1 / h_0$ は 2.0 に仮定し、N は、7 から 29 まで変化させている。これより、高次の振動数まで、比較的安定した収束状態が得られている。本手法の解析精度を確認するために、小林らの解析解³⁾と比較した結果が表 - 2 である。ここで、他の 2 辺の境界条件を 9 種類にとり、また δ は 2.0 に仮定している。これより、板の周辺が固定または単純支持された場合は、本手法の結果が小林らの解と非常によく一致した結果が得られている。一方、自由辺を含む問題では、若干精度が落ちているが、いずれも有効桁数で 3 桁まで一致した解が得られている。

表 - 1 変厚正方形板の振動数パラメータの収束性に与える N の影響; $\delta=2.0, a/b=1.0, C-C$

N	Modes						
	1st	2nd	3rd	4th	5th	6th	7th
7	42.356	80.090	106.78	140.36	147.81	195.61	211.60
9	42.330	79.749	100.84	138.37	146.87	193.85	206.61
11	42.316	79.682	101.29	138.58	146.64	188.58	206.40
13	42.316	79.676	101.20	138.47	146.60	188.26	206.23
15	42.316	79.675	101.20	138.46	146.60	188.31	206.20
17	42.317	79.675	101.20	138.46	146.60	188.31	206.19
19	42.313	79.675	101.20	138.46	146.60	188.31	206.19
21	42.308	79.675	101.20	138.46	146.60	188.31	206.19
23	42.324	79.673	101.19	138.46	146.60	188.31	206.19
25	42.310	79.701	101.20	138.46	146.60	188.31	206.19
27	42.317	79.670	101.20	138.46	146.63	188.31	206.19
29	42.316	79.699	101.18	138.41	146.55	188.31	206.24

表 - 2 変厚正方形板の振動数パラメータの精度比較; N=15, $\delta=2.0, a/b=1.0$

境界条件	Modes						
	1st	2nd	3rd	4th	5th	6th	7th
(1,1) (2,1) (1,2) (2,2) (3,1) (1,3) (3,2)							
C-C	42.316	79.675	101.20	138.46	146.60	188.31	206.20
*	42.316	79.675	101.20	138.46	146.60	-	-
S-C	35.300	73.830	87.047	126.03	140.25	166.90	195.27
	35.300	73.830	87.047	126.03	140.25	-	-
C-S	34.278	76.657	84.704	127.10	145.76	164.00	199.68
	34.278	76.657	84.703	127.09	145.76	-	-
S-S	29.208	71.753	72.534	116.51	139.74	144.52	188.34
	29.208	71.753	72.533	116.51	139.74	-	-
(1,1) (1,2) (2,1) (2,2) (1,3) (3,1) (2,3)							
C-F	20.224	47.923	68.946	95.608	104.24	143.64	152.86
	20.170	47.937	68.960	95.555	104.27	-	-
F-C	18.075	50.024	52.749	91.029	108.43	109.72	150.57
	18.075	50.020	52.743	91.011	108.41	-	-
S-F	18.783	41.188	66.641	89.814	90.479	138.59	140.40
	18.787	41.186	66.642	89.507	90.480	-	-
F-S	16.464	41.521	52.493	86.663	91.914	109.69	138.52
	16.463	41.518	52.487	86.645	91.901	-	-
(1,1) (1,2) (2,1) (1,3) (2,2) (2,3) (3,1)							
F-F	14.385	24.688	52.142	54.802	74.008	105.23	109.66
	14.372	24.687	52.138	54.811	73.989	-	-

* 小林、園田らの解析解³⁾。

(i,j) : i,j はそれぞれ y 方向と x 方向のモード次数

4. まとめ 変厚長方形板の振動解析への半解析的な DQ 法の適用について検討を行った。得られた結果は以下のようにまとめられる。1) 不等分割を用いた DQ 法を用いれば、高次の振動数まで安定した収束性が得られる。2) 少ない未知数で、精度の高い結果が得られている。3) 任意の変断面性状を持つ変厚板の振動解析ができる。

参考文献 1) Bert, C.W. et al.: AMR, 49, 1-28, 1996. 2) 水澤：土木学会年講, 1999. 3) Kobayashi, H. and Sonoda, K.: Natural frequencies of rectangular plates with tapered thickness. Mem. Fac. Eng., Osaka City Univ., Vol. 30, 123-144, 1989.