

ケーブルを有する骨組構造の有限変位解析

阪神高速道路公団 正会員 時 譲太
長岡技術科学大学 正会員 林 正
長岡技術科学大学 正会員 岩崎英治

1. まえがき

マトリックス骨組構造解析法では、ケーブル部材は折れ線で近似するリンクケーブルや曲線で近似するケーブル要素に置き換えられる。前者は様々な荷重状態に対して解析を行う事ができるが、ケーブルの湾曲が大きくなると細かい要素分割が必要となり、節点数が増加する。一方、後者はケーブル部材を少数の要素で表現できる。本報告では、極めて直線に近い状態から大きく湾曲した状態まで一要素で表現できるケーブル要素を開発する。

2. ハイラーキケーブル要素

本ケーブル要素は形状関数にハイラーキ多項式¹⁾を用いるので、ハイラーキケーブル要素と呼ぶ。伸び剛性を一定と仮定し、曲げ剛性と材料非線形性を無視する。要素は両端のみに節点を持ち、要素内で並進変位の節線自由度を有する。また、節点の位置は全体デカルト座標系の座標値で定め、曲線上の座標値は親要素における正規座標 ξ をアイソパラメトリック写像することにより求める。

伸張前後の線素 ds, ds^* を次式で表す。

$$ds = J_s d\xi, \quad ds^* = J_s^* d\xi \quad (1)$$

ここに、 $()^*$ は伸張後の物理量を示し、 J_s, J_s^* は次式で求まる一次元のヤコビアンである。

$$\left. \begin{aligned} J_s &= \{J_1^2 + J_2^2 + J_3^2\}^{\frac{1}{2}} \\ J_s^* &= \{(J_1^*)^2 + (J_2^*)^2 + (J_3^*)^2\}^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

また、形状関数ベクトル $\mathbf{f}_i$ を用いて次式を定義する。

$$J_1 = dx/d\xi, \quad J_2 = dy/d\xi, \quad J_3 = dz/d\xi \quad (3)$$

$$J_i^* = J_i + e_i \quad (4)$$

$$\mathbf{g}_i = d\mathbf{f}_i/d\xi \quad (i = 1, 2, 3) \quad (5)$$

伸び率 ε_s は次式で求める。

$$\varepsilon_s = J_s^*/J_s - 1 \quad (6)$$

増分理論による定式化から、剛性方程式は次式となる。

$$[\mathbf{K}_T]\Delta\mathbf{d} = \Delta\mathbf{P} + \Delta\mathbf{F} + \mathbf{R}^* \quad (7)$$

ここで、添記号 Δ は増分後の諸量を表し、 $\mathbf{d}$ は要素の一般化変位ベクトル、 $\mathbf{K}_T$ は接線剛性行列、 $\mathbf{P}$ は等価節点力、 $\mathbf{F}$ は部材端力、 $\mathbf{R}^*$ は増分時に生じる不平衡力である。

3. アダプティブ法

ケーブルの形状決定問題に対し、効率的な数値計算法を提案する。

解の精度を有効桁数で r 桁まで収束させたい場合、多項式の展開項数 m を増分前のサグ f とケーブル長 S をパラメータにした次の推定式から求める。なお、推定式は、ある展開項数の場合にガウス求積法における積分点数を変化させ、曲線を多項式で近似する場合の誤差を調べ、その結果を参考にして定めている。

$$m = 2[r \cdot f/S] + 5 \quad (8)$$

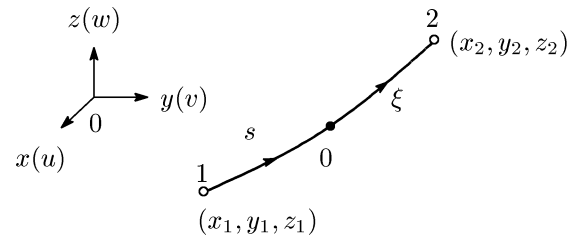


図-1 空間曲線材

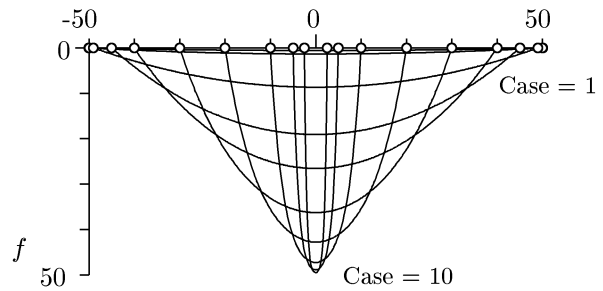


図-2 対称ケーブル

表-1 ケーブルの水平反力と張力の誤差

Case	ℓ	項数 m	相対誤差 (%)	
			H	T_{max}
1	100.1	5	1.8×10^{-15}	1.6×10^{-15}
2	100.0	5	5.3×10^{-10}	5.3×10^{-10}
3	98.0	9	1.2×10^{-14}	1.0×10^{-14}
4	90.0	11	-4.2×10^{-13}	-2.3×10^{-13}
5	80.0	13	-6.1×10^{-15}	-7.8×10^{-16}
6	60.0	15	-2.9×10^{-14}	-3.5×10^{-15}
7	40.0	15	-1.8×10^{-12}	-4.4×10^{-14}
8	20.0	17	1.1×10^{-12}	2.7×10^{-15}
9	10.0	17	2.4×10^{-12}	2.2×10^{-16}
10	5.0	17	4.5×10^{-11}	2.7×10^{-15}

ここに, [] はガウス記号である.

ケーブル構造の解析では, 増分前の局所座標系において, 式 (8) から求まる展開項数を用いて伸張後のケーブル長 $S(=\int_{-1}^1 J_s ds)$ を事前に誤差評価する. 所望の精度を満たさないときは展開項数を 2 項増加し, 再度ケーブル長の誤差評価を行う. そして, 所望の精度を満たしたときに構造全体の計算を行う. これがケーブル部材におけるアダプティブ法であり, ケーブル形状に対する誤差を事前に誤差評価するので, 計算効率に優れたアルゴリズムである.

アダプティブ法を用いて図-2に示す対称ケーブルの解析を行う. 解析条件はケーブルの無応力長を $S_0 = 100$ と一定にし, 支間長 ℓ はケーブル無応力長より少し長いものからケーブルが大きく湾曲するまで種々に変化させる. 荷重は軸線に沿う面内荷重 $q(s) = 1.0$ で, 伸び剛性は $EA = 2 \times 10^6$ とする. 結果を表-1に示すが, 本手法により求めた支点での水平反力 H およびケーブル最大張力 T_{max} は所望精度の解が得られている.

4. リンクケーブルとの比較

図-2の対称ケーブルでさらに面外荷重 $q(y) = 0.5$ が载荷する場合に, リンクケーブルとハイアラキケーブル要素を用いて解析を行う. 図-2の Case 3, 9 について, 荷重载荷後のケーブル長, 両端節点 1, 2 での水平反力とケーブル張力を両ケーブルで比較する. 結果を表-2に示す. 表ではリンクケーブル (Link) に対するハイアラキケーブル要素 (Hier) の相対誤差を求めている. なお, 両ケーブルの自由度数は等しくしている.

表-2 リンクケーブルとの比較

Case	無応力長 S_0 (ℓ)	要素 (%)	ケーブル長 S	水平反力		ケーブル張力	
				1	2	1	2
3	100 (98)	面内	Link	100.00710	139.18030	145.84500	145.84500
			Hier	100.00716	140.19670	148.84594	148.84594
			誤差	-0.000	-0.725	-2.016	-2.016
		面外	Link	100.00794	155.57480	163.02800	163.02800
			Hier	100.00800	156.71065	166.38278	166.38278
			誤差	-0.000	-0.725	-2.016	-2.016
9	100 (10)	面内	Link	100.00125	1.14370	44.20300	44.20300
			Hier	100.00125	1.11111	50.01234	50.01234
			誤差	-0.000	2.933	-11.616	-11.616
		面外	Link	100.00140	1.27870	49.42000	49.42000
			Hier	100.00140	1.24226	55.91550	55.91550
			誤差	-0.000	2.933	-11.617	-11.617

表-3 分割数を 2 倍にした場合 (Case 9)

要素 (%)	ケーブル長	水平反力		ケーブル張力	
	S	1	2	1	2
面内	Link	100.00123	1.11930	47.01300	47.01300
	Hier	100.00125	1.11111	50.01234	50.01234
	誤差	-0.000	0.737	-5.997	-5.997
面外	Link	100.00138	1.25140	52.56200	52.56200
	Hier	100.00140	1.24226	55.91550	55.91550
	誤差	-0.000	0.736	-5.997	-5.997

表-2より, 伸張後のケーブル長 S は, リンクケーブルとハイアラキケーブル要素でよく一致している. サグの小さい Case 3 では, 水平反力とケーブル張力の誤差が数 % となり, 両ケーブルの解は比較的良好に一致している. しかし, サグが大きい Case 9 になると, Case 3 より誤差が増大し, 特に張力では 10 % 以上の誤差になっている. そこで, リンクケーブルは分割数を増加させれば正解へ収束すると考えられるので, Case 9 のみ分割数を 2 倍にして再度計算を行った. その結果を表-3に示す. 表-3より, リンクケーブルの分割数を 2 倍にしたとき, 表-2と比較して誤差が半減し, 精度が向上している. しかし, 張力については, やはり数 % の誤差がある.

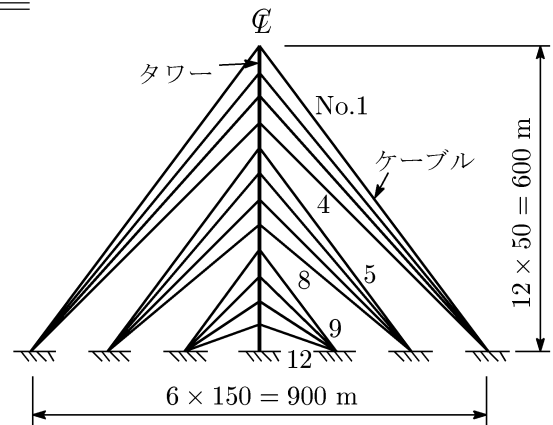


図-3 600m Guyed Tower

5. Guyed Tower の計算

図-3に示す高さ 600 m の塔を 48 本のケーブルで支持した支線付マストについて数値計算を行う. 紙面の都合上, 計算結果については当日発表で示す.

以上の結果から次のことが言える.

- (1) ハイアラキケーブル要素は, 一要素で極めて直線に近い状態から大きく湾曲した状態までを表現できる.
- (2) ケーブル部材におけるアダプティブ法のアルゴリズムを提案した.
- (3) ハイアラキケーブル要素は, リンクケーブルで求めることができない正確なケーブル張力を求めることができる.