# 均質化法によるセル構造解析における骨組要素の適用


宇都宮大学 ○学生員 大植 健　宇都宮大学 正 員 斉木 功
宇都宮大学 正 員 中島 章典　東北大学 正 員 寺田 賢二郎


## 1. はじめに

複合材料の物性評価のため，注目を集めている平均化手法として均質化法という理論がある．均質化法は非均質材料の平均物性を，その材料の微視構造の変形による影響を考慮して求めるマルチスケール解析の一つである．この微視構造のモデル化において巨視構造が連続体であれば，微視構造も連続体としてモデル化されることが一般的である．しかし，土やセル構造体[1),2)]のような非均質材料において，微視構造は連続体としてより土は個別要素などの離散モデルや，セル構造体は骨組構造としてモデル化する方が合理的であると考えられる．そこで本研究では，巨視的には連続体であるが，その微視構造が骨組構造によってモデル化される問題を設定し，その定式化を行うことを目的としている．

## 2. 解析方法

**図–1** に示すように，大きさ $\varepsilon Y$ のユニットセルによって周期的に埋め尽くされた領域 $\Omega^\varepsilon$ を解析対象とし, 平面ひずみの線形問題として定式化を行う．ただし， $\varepsilon$ は解析対象の大きさに比べて非常に小さい $(\varepsilon \ll 1)$ とし，したがってユニットセルの大きさも解析対象に比べて非常に小さい．ここで，微小なユニットセル内での尺度として，微視スケール変数 $y_i = x_i/\varepsilon$ を導入する．これに対し，解析領域全体の尺度である． $x_i$ を巨視スケールと呼ぶこととする．ここで，一般的な釣合式の弱形式は以下の式で表される．

$$\int_{\Omega^\varepsilon} E^\varepsilon_{ijk\ell} \frac{\partial u^\varepsilon_k}{\partial x_\ell} \frac{\partial v^\varepsilon_i}{\partial x_j}\,\mathrm{d}\Omega = \int_{\partial\Omega^\varepsilon} t_i v^\varepsilon_i\,\mathrm{d}S + \int_{\Omega^\varepsilon} f^\varepsilon_i v^\varepsilon_i\,\mathrm{d}\Omega \tag{1}$$

ここに， $E_{ijk\ell}$ は構成テンソルであり， $u^\varepsilon_k$ は変位， $v^\varepsilon_i$ は仮想変位である． $t_i$ は表面力， $f^\varepsilon_i$ は物体力であり，上付きの $\varepsilon$ はユニットセルの大きさの影響を表す．

上の式に漸近展開法[3)]を用いて均質化法の定式化を進めていく．変位 $u^\varepsilon_k$ を微視構造のスケール $\varepsilon$ に関して漸近展開し， 2 変数表示すると以下のようになる．

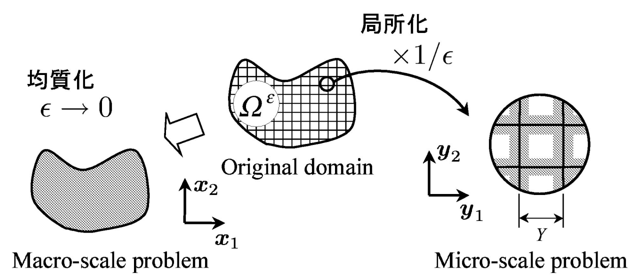
$$u^\varepsilon_i(\boldsymbol{x}) = u^0_i(\boldsymbol{x}) + \varepsilon u^1_i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) + \varepsilon^2 u^2_i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) + \cdots \tag{2}$$

この関係は，仮想変位 $v^\varepsilon_i$ に対しても成り立ち，この漸近展開を行った変位を式 (1) に代入し， $\varepsilon \to 0$ の極限操作を行うために次に示す積分公式を用いる．

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\Omega^\varepsilon} \psi\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right)\,\mathrm{d}\Omega = \int_\Omega \frac{1}{|Y|}\int_Y \psi\,\mathrm{d}Y\,\mathrm{d}\Omega \tag{3}$$

以上のことから，微視スケールの釣合式 (微視的問題) として次式が得られる．

$$\int_Y E_{ijpq} \frac{\partial \chi^{k\ell}_p}{\partial y_q} \frac{\partial v^1_i}{\partial y_j}\,\mathrm{d}Y = \int_Y E_{ijk\ell} \frac{\partial v^1_i}{\partial y_j}\,\mathrm{d}Y \tag{4}$$




**図–1** 解析対象

$\chi^{k\ell}_p$ は特性関数と呼ばれ，単位の巨視ひずみのに対する微視構造の変位を表し，上付きの $k\ell$ は巨視ひずみの方向を表す．ここに，右辺は形式的に分布外力と同じ形で示されているが，この場合は外力ではなく単位の巨視ひずみに起因する内力であるので今後，巨視内力と呼ぶことにする．また，巨視スケールの釣合式 (巨視的問題) は次式のように得られる．

$$\int_\Omega E^{\mathrm{H}}_{ijk\ell} \frac{\partial u^0_k}{\partial x_\ell} \frac{\partial v^0_i}{\partial x_j}\,\mathrm{d}\Omega = \int_\Omega \frac{1}{|Y|}\int_Y f_i\,\mathrm{d}Y v^0_i\,\mathrm{d}\Omega + \int_{\partial\Omega} t_i v^0_i\,\mathrm{d}S \tag{5}$$

ただし， $E^{\mathrm{H}}$ は均質化材料定数であり，次式で定義される．

$$E^{\mathrm{H}}_{ijk\ell} = \frac{1}{|Y|}\int_Y \left\{ E_{ijk\ell} - E_{ijpq}\frac{\partial \chi^{k\ell}_p}{\partial y_q} \right\}\,\mathrm{d}Y \tag{6}$$

ここで，微視問題における変位場に Bernoulli-Euler 梁の変位場を導入する．梁部材の部材軸に沿う $y_1$ 軸とそれに直交する $y_2$ 軸を局所座標系とすると変位場は以下のようになる．

$$\overline{u}_1(y_1, y_2) \simeq \overline{u}_{\mathrm{a}}(y_1) + y_2\overline{\theta}_{\mathrm{a}}(y_1), \qquad \overline{u}_{y_2}(y_1, y_2) \simeq \overline{w}_{\mathrm{a}}(y_1) \tag{7}$$


**Key Words:** **均質化法，セル構造体，骨組構造，マルチスケール解析**



〒 321-8585 宇都宮市陽東 7-1-2　宇都宮大学工学部建設学科 Tel.028-689-6208 Fax.028-689-6230

変数についているオーバーラインは，それが局所系に属することを表し，下付きの a は梁の中立軸の変位であることを意味する．$\overline{u}_{\mathrm{a}}(y_1)$ を部材軸方向の変位，$\overline{w}_{\mathrm{a}}(y_1)$ を部材軸直角方向の変位，$\overline{\theta}_{\mathrm{a}}(y_1)$ を回転としている．式 (4) の微視的問題の特性関数 $\chi$ と仮想変位 $v$ についてこの関係を用いると，微視構造を骨組構造としたものと等価な式が得られる．つまり，特性関数のひずみ成分について言えば以下のような関係が成り立つ．

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \overline{\chi}_1^{k\ell}(y_1,y_2)}{\partial y_1} = \frac{\mathrm{d}\overline{u}_{\mathrm{a}}^{k\ell}(y_1)}{\mathrm{d}y_1} + y_2 \frac{\mathrm{d}\overline{\theta}_{\mathrm{a}}^{k\ell}(y_1)}{\mathrm{d}y_1}, \qquad \frac{\partial \overline{\chi}_1^{k\ell}(y_1,y_2)}{\partial y_2} = \overline{\theta}_{\mathrm{a}}^{k\ell}(y_1) \\
&\frac{\partial \overline{\chi}_2^{k\ell}(y_1,y_2)}{\partial y_1} = \frac{\mathrm{d}\overline{w}_{\mathrm{a}}^{k\ell}(y_1)}{\mathrm{d}y_1}, \qquad \frac{\partial \overline{\chi}_2^{k\ell}(y_1,y_2)}{\partial y_2} = 0
\end{aligned} \tag{8}$$

ここに，$\overline{u}_{\mathrm{a}}^{k\ell}(y_1)$，$\overline{w}_{\mathrm{a}}^{k\ell}(y_1)$，$\overline{\theta}_{\mathrm{a}}^{k\ell}(y_1)$ の上付きの $k\ell$ は特性関数と同様，巨視ひずみの方向を表す．

また，均質化材料定数は式 (6) に特性関数として先に説明した梁の変位場を導入すれば，次式のように得られる．

$$E^{\mathrm{H}}_{ijk\ell} = \frac{h_{\mathrm{e}}}{|Y|} \int \left\{ \overline{E}_{ijk\ell} - \overline{E}_{ij11} \frac{\mathrm{d}\overline{u}_{\mathrm{a}}^{k\ell}(y_1)}{\mathrm{d}y_1} \right\} \mathrm{d}y_1 \tag{9}$$

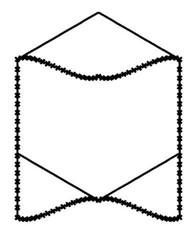
上式の積分はユニットセル内の全部材に関する部材軸に沿った積分であり，$h_{\mathrm{e}}$ はユニットセルを構成する骨組部材の高さである．

## 3.　解析例

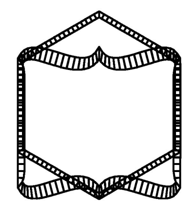
正六角形セルを解析例として以下にその結果を示す．セルの一辺の長さ $L$ と骨組部材の高さ $h_{\mathrm{e}}$ の比を $h_{\mathrm{e}}/L = 1/9$ とし，セルを構成している材料は，等方性弾性の平面ひずみとして考え Young 率 $E$ を 1.0(GPa)，Poisson 比を 0.3 とした．

### (1)　特性関数

巨視ひずみ $\dfrac{\partial u_1^0}{\partial x_1} = -1$ の時の特性関数を**図–2** と**図–3** に示す．図より，連続体と骨組では，特性関数に違いは見られず，ほぼ同一の変形形状が得られている．



**図–2**　特性関数 (骨組)



**図–3**　特性関数 (連続体)

### (2)　均質化材料定数

均質化材料定数は式 (9) より得られる．骨組モデルの均質化材料定数は以下のようになる．

$$\frac{E^{\mathrm{H}}_{1111}}{E} = \frac{E^{\mathrm{H}}_{2222}}{E} = 2.59 \times 10^{-1}, \quad \frac{E^{\mathrm{H}}_{1122}}{E} = \frac{E^{\mathrm{H}}_{2211}}{E} = 1.01 \times 10^{-1}$$

$$\frac{E^{\mathrm{H}}_{1212}}{E} = 1.58 \times 10^{-1}, \quad \frac{E^{\mathrm{H}}_{1112}}{E} = \frac{E^{\mathrm{H}}_{2212}}{E} = \frac{E^{\mathrm{H}}_{1211}}{E} = \frac{E^{\mathrm{H}}_{1222}}{E} = 0$$

次に，セルを連続体として求めた均質化材料定数を示す．

$$\frac{E^{\mathrm{H}}_{1111}}{E} = \frac{E^{\mathrm{H}}_{2222}}{E} = 4.52 \times 10^{-2}, \qquad \frac{E^{\mathrm{H}}_{1122}}{E} = \frac{E^{\mathrm{H}}_{2211}}{E} = 4.31 \times 10^{-2}$$

$$\frac{E^{\mathrm{H}}_{1212}}{E} = 4.76 \times 10^{-2}, \qquad \frac{E^{\mathrm{H}}_{1112}}{E} = \frac{E^{\mathrm{H}}_{2212}}{E} = \frac{E^{\mathrm{H}}_{1211}}{E} = \frac{E^{\mathrm{H}}_{1222}}{E} = 0$$

均質化材料定数の値は連続体と骨組では，明らかに異なっており，連続体として解いたものに比べ，骨組としたものの方が剛性が高くなって値が得られた．

均質化材料定数の算定式は形式的に，特性関数の変形勾配を重みとし，その重み付き材料定数を元の材料定数から差し引いたものを積分することにより得られる．よって，その変形勾配が大きい部材ほど剛性が小さくなる．この事は，一般的な骨組構造において，外力の方向に直交するような部材は剛性としての役割はほとんどなく，軸方向に圧縮 (引張) を受けるような部材がその剛性としての役割を持つという考えとも一致する．この時，連続体モデルは巨視ひずみの方向と交差している部材が部材軸直角方向へ膨張する形で変形することにより，上の考えを満足させているが，骨組モデルでは，そのような変形が変位場の拘束により表されず，その分，剛性が高く得られていると思われる．また，解析手法の中でも示したように連続体モデルでの均質化材料定数は式 (6) より，部材軸方向と部材軸直角方向，両方の変形を考慮しているのに対し，骨組構造でモデル化した場合，式 (9) から均質化材料定数は部材軸方向の変形のみを考慮するようになっている．

したがって，骨組構造においても連続体モデルのような部材軸直角方向の変形も考慮しなければならなく，その対策が必要とされる．

### 参考文献


1) L. J. Gibson and M. F. Ashby: *Cellular solids*, CAMBRIDGE, 1997.
2) 斉木功，寺田賢二郎，池田清宏：セル構造体のマルチスケール解析のための座屈を考慮した微視スケール問題に関する一考察，応用力学論文集, Vol.2, pp.287-294,　1999.
3) E. Sanchez-Palencia: *Non-homogeneous Media and Vibration Theory*, Springer-Verlag, pp.45-84, 1980.