非均質弾塑性体に対するマクロ構成関係

東北大学　学生員　○松井　和己
東北大学　正会員　寺田　賢二郎
東北大学　正会員　京谷　孝史
東北大学　正会員　岩熊　哲夫

1. はじめに

数学的均質化法の最も大きな特徴は，複合材をはじめとした非均質材料に対して Global-Local 的なモデル化を可能とするものである．つまり構造全体としての巨視的な力学挙動と，材料の非均質性が定義される微視領域での力学挙動を数学的に関連づけることができる．これによってミクロ領域の非均質性を忠実に反映したマクロ構造解析が可能となるため，さまざまな力学現象の解明に役立つものと期待され，これまでに多くの研究成果が報告されている．

そこで本研究ではこのようなマルチスケール構造における，ミクロ問題の果たす役割に注目して考えることにする．マルチスケール解析において，マクロ構造がその物性を評価する際にミクロ構造解析から得られた結果を参照することから，ミクロ問題はマクロ構造に対して一種の構成関係を与えているものであると捉え，ミクロ構造を定義したユニットセルモデルに対して多くの数値実験を行い，これらの結果からマクロ的な構成関係を同定しようと試みた．

2. 弾塑性マルチスケール境界値問題

一般的な均質化理論にしたがってマクロスケール $\boldsymbol{x}$ と，非均質性を測る尺度であるミクロスケール $\boldsymbol{y}$ を導入する．この 2 つのスケールはミクロ構造の大きさを表すパラメータ ε によって $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}/\varepsilon$ と関連づけられ， $\varepsilon \to 0$ の極限をとることによってミクロ構造，マクロ構造それぞれが連成した境界値問題が設定される．この詳細は寺田・菊池[1)]を参照し，ここではマクロ構造に対して一種の構成関係を与える働きをするミクロ境界値問題のみを示す．

$$\int_Y \nabla_y \boldsymbol{\eta}^1 : \boldsymbol{\sigma}^0(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})dy = 0 \quad \forall \boldsymbol{\eta}^1 \in \mathcal{V}_{\mathrm{per}} \quad \cdots\cdots (1)$$

$$\int_Y \boldsymbol{\gamma}^0 : \left(\frac{\partial W(\boldsymbol{y},\boldsymbol{\varepsilon}^0)}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^0} - \boldsymbol{\sigma}^0(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \right) dy = 0 \qquad \forall \boldsymbol{\gamma}^0 \in \mathcal{S}_{\mathrm{per}} \quad \cdots\cdots (2)$$

$$\int_Y \boldsymbol{\tau}^0 : \left(\mathrm{sym}(\nabla_x \boldsymbol{u}^0(\boldsymbol{x}) + \nabla_y \boldsymbol{u}^1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})) - \boldsymbol{\varepsilon}^0(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \right) dy = 0 \quad \forall \boldsymbol{\tau}^0 \in \mathcal{E}_{\mathrm{per}} \quad \cdots\cdots (3)$$

ここで $\boldsymbol{\sigma}^0(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ ， $\varepsilon^0(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ はそれぞれミクロ応力，ミクロひずみである．また $\boldsymbol{u}^1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ は Y-periodic な変位関数で，これとマクロ変位 $\boldsymbol{u}^0(\boldsymbol{x})$ を用いてユニットセル内の変位は次のように表される．

$$\boldsymbol{u} = \mathrm{sym}(\nabla_x \boldsymbol{u}^0) \cdot \boldsymbol{y} + \boldsymbol{u}^1 \quad \cdots\cdots (4)$$

ミクロ構造を構成する材料の構成則として関連流れ則および等方硬化則を考えると，時刻 t_n における塑性応答が既知であるとして，

$$\varepsilon^{p0}_{n+1} = \varepsilon^{p0}_n + \Delta\gamma^0 \frac{\partial f(\boldsymbol{\sigma}^0_{n+1}, q^0_{n+1})}{\partial \boldsymbol{\sigma}}, \quad q^0_{n+1} = q^0_n - \Delta\gamma^0 \boldsymbol{b}(\boldsymbol{y}) \frac{\partial f(\boldsymbol{\sigma}^0_{n+1}, q^0_{n+1})}{\partial q^0} \quad \cdots\cdots (5)$$

$$f(\boldsymbol{\sigma}^0_{n+1}, q^0_{n+1}) \leq 0, \quad \Delta\gamma^0 \geq 0, \quad \Delta\gamma^0 f(\boldsymbol{\sigma}^0_{n+1}, q^0_{n+1}) = 0 \quad \cdots\cdots (6)$$

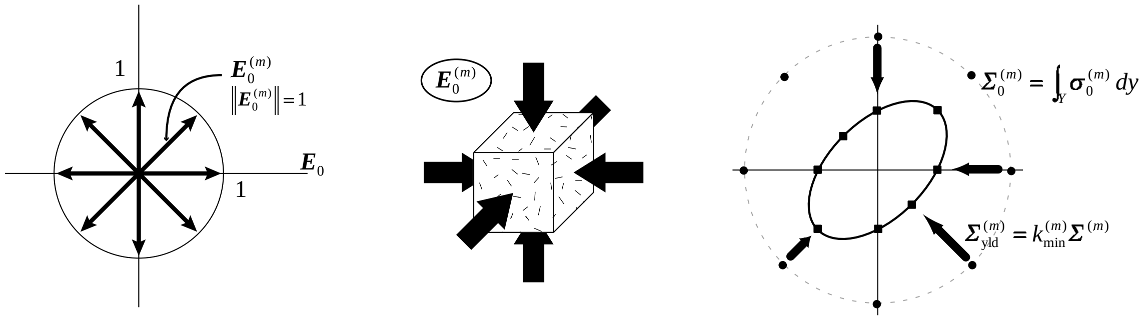
を満たすような時刻 t_{n+1} における塑性応答を表す内部変数も求める必要がある [2)]．ここで q^0 は塑性硬化に関する内部変数， $f(\boldsymbol{\sigma},q)$ は降伏関数， $\boldsymbol{b}(\boldsymbol{y})$ は単位体積に働く物体力である．

3. マクロ構成関係の事前評価

前節で示したミクロ境界値問題が，マクロ問題に対して離散的な応力・ひずみ関係を与えていることから，ミクロ問題がマクロ構造の構成関係を与えていると解釈することができる．このような構成関係を同定することを最終的な目標とし，ここではこれらの構成関係のうちマクロ的な初期降伏曲面に注目して議論する．ここでミクロ構造の構成材料は等方硬化のみを仮定した J_2 流れ則に従うものとし，これらのひとつでも降伏応力に達した状態をマクロ降伏状態と定義する．

このような定義のもとでミクロ構造に対して数値実験を行い，マクロ初期降伏曲面を求めるがその手順を次にまとめる．まず， $(n_{\mathrm{dim}}(n_{\mathrm{dim}}+1)/2)$ 次元マクロひずみ空間における単位球を考え，この球面上に均等に分布するような単位

〒 980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 06 東北大学大学院工学研究科 土木工学専攻, Phone: 022-217-7420, FAX: 022-217-7418
Key Words: Multiscale Analysis, Homogenization Method, Elastplasticity, Yield Surface



a) Unit vectors in strain space　b) Microscopic self-euqilibrium problem　c) Macroscopic initial yield stress in macroscopi stress space

Fig–1 Approximation of macroscopic initial yield surface

マクロひずみ $\boldsymbol{E}_0^{(m)}(m = 1 \sim M)$ の集合を考える (**Fig–1(a)**)．次にこのマクロひずみを外力としたミクロ構造解析を行い，ミクロ応力分布 $\boldsymbol{\sigma}_0^{(m)}(\boldsymbol{y})$ を求め (**Fig–1(b)**)，全ての応力評価点に対してそれぞれ von-Mises の降伏基準を満たすような係数の最小値 $k_{\rm min}^{(m)}$ を求める．

$$k_{\rm min}^{(m)} = \min\left\{ k > 0 \middle| f\left(k_{\rm min}^{(m)} \boldsymbol{\sigma}^{(m)}(\boldsymbol{y})\right) = 0,\ \forall \boldsymbol{y} \in Y \right\}, \quad \text{where} \quad k^{(m)} = \frac{\left\| \mathrm{dev}\left(\boldsymbol{\sigma}^{(m)}(\boldsymbol{y})\right)\right\|}{\sqrt{2/3}} \qquad (7)$$

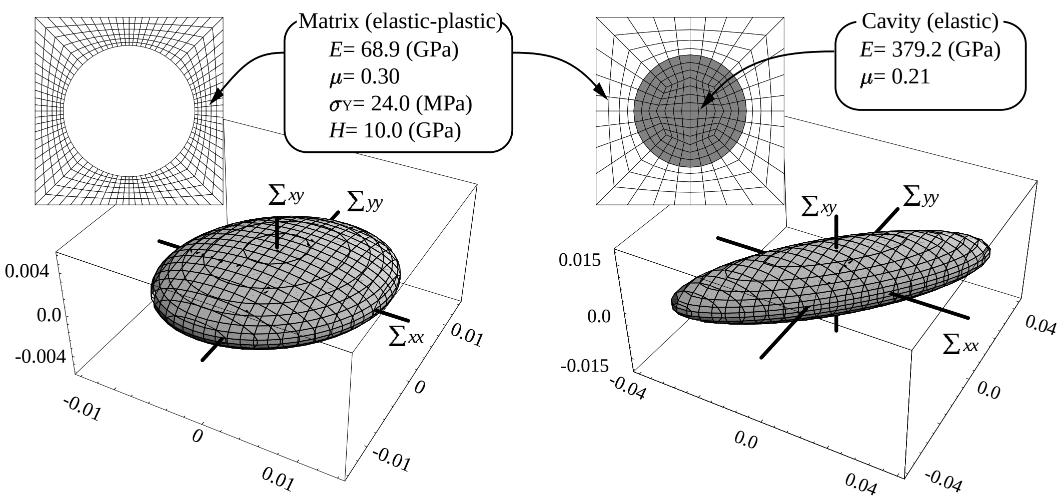
このようにして求めた最小の係数 $k_{\rm min}^{(m)}$ を用いてマクロ初期降伏応力 $\boldsymbol{\Sigma}_{\rm yld}^{(m)}$ は次のようにして求められる．

$$\boldsymbol{\Sigma}_{\rm yld}^{(m)} = \int_Y \boldsymbol{\sigma}_{\rm yld}^{(m)}(\boldsymbol{y})\, d\boldsymbol{y}, \quad \text{where} \quad \boldsymbol{\sigma}_{\rm yld}^{(m)}(\boldsymbol{y}) = k_{\rm min}^{(m)} \boldsymbol{\sigma}_0^{(m)}(\boldsymbol{y}) \qquad (8)$$

以上の操作を繰り返すことによって求められたマクロ初期降伏応力の集合を，次のような全応力空間において正規化された２次曲面で最小二乗近似することによって，マクロ初期降伏曲面が求められる．

$$F(\boldsymbol{\Sigma}) = \boldsymbol{\Sigma}^T \boldsymbol{A} \boldsymbol{\Sigma} + \boldsymbol{b}^T \boldsymbol{\Sigma} - 1 = 0 \qquad (9)$$

解析例として **Fig–2** に用いたミクロ構造と数値実験から求めたマクロ初期降伏曲面の様子を示す．この図を見てわかるように，ミクロ領域における「構造」の違いを忠実に反映したマクロ初期降伏曲面が求められた．



a) Microstructure with a cavity　b) Microstructure with an elastic inclusion

Fig–2 Microscopic models and their macroscopic initial yield surfaces

4. まとめ

弾塑性体からなる非均質構造の構成関係を同定する第一歩として，マクロ初期降伏曲面を求めることができた．今後はこの降伏曲面の進展についての考察を重ねることによって，マクロ的な構成関係を評価する予定である．

参考文献

1) 寺田賢二郎, 菊池昇: 非均質弾塑性体のマルチスケール解析のための一般化アルゴリズム，土木学会論文集, No.633/I-49, 217-229, 1999.
2) Simo,J.C. and Hughes, T.J.R., *Computational Inelasticity*,Springer-Verlag, New York, 1998