

非線形時系列フィルタ理論の精度比較

武蔵工業大学 学生員 ○熊井 博司
正会員 星谷 勝
正会員 丸山 収

1. はじめに

本研究は、非線形システムの状態推定を行う際に、拡張カルマンフィルタ法と等価ガウス変換により偽線形確率微分方程式に定式化しカルマンフィルタを用いる手法の精度を比較を行っている。拡張カルマンフィルタ法は推定値のまわりで一次の項までテーラー展開し線形化したものである。一方等価ガウス変換法は、偽線形確率微分方程式へと非線形システムを線形化しカルマンフィルタのアルゴリズムを援用することにより、最適推定値、誤差共分散を求める手法である。本研究は非線形システムの初期通過問題の準解析解算定手法⁽¹⁾の精度を向上させるために行ったものである。

2. 問題設定

本研究では、(1)式で与えられる非線形1自由度モデルを対象とする。

$$\ddot{x}(t) + 2h\omega_0\dot{x}(t) + \omega_0^2\phi(\dot{x}(t), x(t)) = -w(t) \quad (1)$$

ここで、 h ：減衰係数、 ω_0 ：固有円振動数、 $\phi(\dot{x}(t), x(t))$ ：非線形復元力特性および $w(t)$ ：ガウス性ホワイトノイズである。(1)式は、状態空間表示をすることにより、1階のベクトル微分方程式に変換することが可能である。

$$\frac{dz(t)}{dt} = f[t, z(t)] + Gw(t) \quad (2)$$

ここで、 $z(t)$ ：応答ベクトル $x(t)$ および $\dot{x}(t)$ で構成されるベクトル、 $f[t, z(t)]$ ：非線形関数である。

3. 偽線形確率微分方程式の誘導⁽²⁾

(2)式の拡張カルマンフィルタへの定式化は参考文献(1)に委ねることとして、ここでは偽線形確率微分方程式の誘導を行う。線形システムの場合は、作用する外乱がガウス確率過程である限り、推定値および共分散関数により完全に記述され、カルマンフィルタは理論解を与える。しかしながら、非線形推定理論の場合、無限次元のモーメントに関する情報を必要とするために、厳密な非線形フィルタは実現不可能であり、何らかの近似を用いる必要がある。ここでは、(2)式を等価ガウス変換による偽線形確率微分方程式に表現し、カルマンフィルタの状態方程式に用いることにした。(2)式における非線形関数を次式のように展開する。

$$f[t, z(t)] = a(t) + B(t)\{z(t) - \hat{z}(t)\} + e(t) \quad (3)$$

(3)式における $e(t)$ は、展開を第2項までで打ち切ったすべての誤差を集めたものである。 $a(t)$ および $B(t)$ は、非線形システムの応答時系列 Y_t が観測されたという条件のもとで、 $e(t)$ の条件つき自乗期待値が最小となるように決定される。

$$E[e(t)e(t)^T | Y_t] = E[\{f[t, z(t)] - a(t) - B(t)(z(t) - \hat{z}(t))\}\{f[t, z(t)] - a(t) - B(t)(z(t) - \hat{z}(t))\}^T | Y_t] \rightarrow \min \quad (4)$$

(4)式の最小化により次式を得る。

$$a(t) = \int f[t, z(t)]P[z(t)|Y_t]dz(t) = E[f[t, z(t)]|Y_t] \quad (5), \quad B(t) = E[(f[t, z(t)] - \hat{f}[t, z(t)])(z(t) - \hat{z}(t))^T | Y_t]P(t)^{-1} \quad (6)$$

キーワード：偽線形化法、非線形システム、カルマンフィルタ

連絡先：武蔵工業大学 応用力学研究室、東京都世田谷区玉堤 1-28-1、03-3703-3111 内線 6506

(5)式では条件付き確率密度関数： $p[z(t)|Y_t]$ が必要となるが，ここでは未知の平均値 $\hat{z}(t)$ ，分散 $P(t)$ を有するガウス型と仮定する．

$$P[z(t)|Y_t] = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} |P(t)|^{-\frac{1}{2}} \exp\left[-\frac{1}{2}(z(t) - \hat{z}(t))^T P(t)^{-1} (z(t) - \hat{z}(t))\right] \quad (7)$$

非線形システムの偽線形確率微分方程式は， $f[t, z(t)] \cong a(t) + B(t)\{z(t) - \hat{z}(t)\}$ と等価ガウス線形関係式に近似されて次式となる．

$$\frac{dz(t)}{dt} = a(t) + B(t)(z(t) - \hat{z}(t)) + Gw(t) \quad (8)$$

次に，非線型復元力特性として Bouc and Wen モデルを採用して，具体的に $a(t)$ および $B(t)$ を求める．

$$\dot{\phi}(\dot{x}(t), x(t)) = A\dot{x}(t) - \beta|\dot{x}(t)|\phi(\dot{x}(t), x(t))^{n-1}\phi(\dot{x}(t), x(t)) - \gamma\dot{x}(t)\phi(\dot{x}(t), x(t))^n \quad (9)$$

4. カルマンフィルタへの定式化

ここで A, β, γ は，履歴特性をコントロールするパラメータである．

例えば $n=1$ として， $z(t) = [x(t)\dot{x}(t)\phi(\dot{x}(t), x(t))]^T = [z_1(t)z_2(t)z_3(t)]^T$ と状態空間表示すると，カルマンフィルタに対する状態方程式は(8)式で与えられる．観測方程式は，観測量が(2)式からシミュレート $[x(t)\dot{x}(t)\phi(\dot{x}(t), x(t))]$ されるの時系列とすれば，(10)式で与えられる．

$$Y(t) = Hz(t) + V(t) \quad (10)$$

ここで， $H: (3 \times 3)$ の単位行列， $V(t)$: 平均値 0 のガウス白色雑音である．(10)式は線形関係で与えられるので，状態方程式の偏位項 $z(t) - \hat{z}(t)$ を考慮して，カルマンフィルタのアルゴリズムが援用できる．また $a(t)$ および $B(t)$ は最適推定値と推定誤差共分散を含んだ関数となっているので，カルマンフィルタのアルゴリズムから求められる結果を取り込みながら，逐次計算を行っていく必要がある．

5. 数値計算例

ここでは，システム応答から等価なガウス分布の最適推定値，共分散行列を推定する手法の検討を行った．

入力加速度には，図-1 のように $N(0, 10)$ で 0.0 ~ 5.0Hz の有帯域ホワイトノイズを用い，時間刻み $\Delta t = 0.01\text{sec}$ ，全継続時間 $t = 20\text{sec}$ として応答計算を行った．また図-2 は，(9)式は $A=1.0, \beta=0.5, \gamma=0.5$ とした復元力特性を示している．図-3 は変位の最適推定値を示している．図-4 は変位の推定誤差共分散を示している．

6. 考察

図-3 より拡張カルマンフィルタを援用する手法より(8)式の偽線形化法の方が精度が良いことが分かる．図-4 も同様に偽線形化法の方が小さい値となっている．

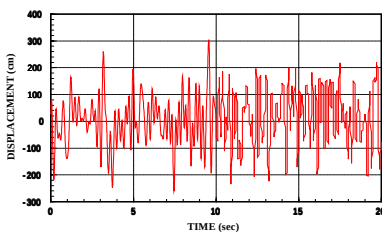


図-1 入力(ホワイトノイズ)

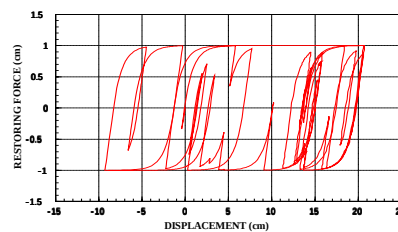


図-2 復元力特性

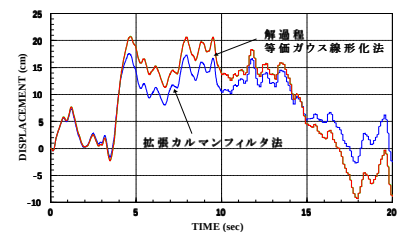


図-3 解過程と2手法の最適推定値

参考文献:(1) M. Hoshiya: and K. Komiya: Pseudo Analytical Method for Stochastic Nonlinear System, Proc. of Fourth Int. Conf. on Stochastic Structural Dynamics-SSD, 98 pp.187-196 August, 1998.

(2) 砂原善文: 確率システム理論 II, 浅倉書店, 1982年.

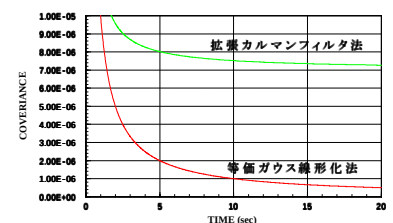


図-4 変位の推定誤差共分散