動的非線形システムの初期通過確率算定

武蔵工業大学　正会員〇丸山　収
武蔵工業大学　正会員　星谷　勝
武蔵工業大学　学生員　熊井博司

1. はじめに

動的外乱を受ける構造物の安全性を議論する場合には，外乱が作用している全継続時間中に応答値が規定された一定値を超えない確率を定量的に評価する必要がある．これは，応答が一定値を越えたら限界状態に達したという基準で安全性を算定するものであり，初期通過確率を算出することに集約できる．

本研究は, 星谷が提案している非線形構造システム初期通過確率の準解析解算定手法(1)の理論を用いて, 数値計算上の精度を向上するために，非ガウス型結合密度関数を等価ガウス結合確率密度関数に近似する手法(2)を用い、1自由度非線形構造系の初期通過確率算定の試算例を示した．

2. 初期通過確率の準解析解算定手法

本研究では，次式で与えられる1自由度非線形振動方程式を対象として，系の応答があるしきい値を超える確率，すなわち初期通過確率を定量的に求めることを目的とする．

$$\ddot{x}(t)+2h\omega_o\dot{x}(t)+\omega_o^2\phi(\dot{x}(t),x(t))=-w(t) \qquad (1)$$

ここで，h：減衰係数，ω_o：固有円振動数，$\phi(\dot{x}(t),x(t))$：非線形復元力特性および $w(t)$：ガウス性ホワイトノイズである．式(1)は，状態空間表示により，１階のベクトル微分方程式に変換することが出来る．

$$\frac{d\boldsymbol{z}(t)}{dt}=\boldsymbol{f}[t,\boldsymbol{z}(t)]+\boldsymbol{G}w(t) \qquad (2)$$

ここで，$\boldsymbol{z}(t)=[x(t)\ \dot{x}(t)\ \phi(x(t),\dot{x}(t))]$：応答ベクトル $x(t)$，$\dot{x}(t)$ および非線形復元力特性で構成される状態ベクトル，$\mathbf{f}[\mathrm{t},\mathbf{z}(\mathrm{t})]$：非線形関数である．

対象構造系が継続時間に安全である確率，すなわち信頼性：P_s は次式で与えられる．

$$P_s=1-P_f=1-P(g(z(t))\le 0:0\le t\le T)\text{，}\ P_f\text{：破壊確率} \qquad (3)$$

ここで，構造系の状態ベクトル：$z(t)$ に関して，しきい値：$\lambda=\{\lambda_1\ \lambda_2\ \lambda_3\}^T$ を考え，任意状態ベクトルの成分：$z_i(t)$ が，λ_i ，$i=1,2,3$ を越えた時点で構造物が破壊するものとして，性能関数を次式で与える．

$$g(z_i(t))=\lambda_i-|z_i(t)|\text{，}\ i=1,2,3 \qquad (4)$$

本研究で対象とする系は，ガウス白色雑音を入力とし，状態ベクトル：$z(t)$ は，マルコフ過程となる．したがって，継続時間：T における信頼性：P_s を算出するためには，次式を評価すれば良い．

$$\begin{aligned}P_s&=P(g(z(0))\ge 0)\times P(g(z(1))\ge 0|g(z(0))\ge 0)\times\cdots\\&\times P(g(z(k+1))\ge 0|g(z(k))\ge 0)\times\cdots\times P(g(z(n))\ge 0|g(z(n-1))\ge 0)\end{aligned}\quad \text{ここで，}\ T=n\Delta\ \text{（継続時間）} \qquad (5)$$

式（５）において，ｋ番目の項は次式のようになる．

$$P(g(z(k+1))\ge 0|g(z(k))\ge 0)=\int_{-\lambda}^{\lambda}\int_{-\lambda}^{\lambda}f(z(k)|z(k+1))dz(k)dz(k+1)=\frac{\int_{-\lambda}^{\lambda}\int_{-\lambda}^{\lambda}f(z(k),z(k+1))dz(k)dz(k+1)}{\int_{-\lambda}^{\lambda}f(z(k))dz(k)} \qquad (6)$$

留意すべきことは，入力がガウス性であっても，システムが非線形のため出力：$z(t)$ は，非ガウス性となる．また $z(t)$ が非ガウス性であっても，その分布特性が既知となれば，積分：$\int_{-\lambda}^{\lambda}\int_{-\lambda}^{\lambda}f(z(k)|z(k+1))dz(k)dz(k+1)$ を解析的に行うことは可能となるが，$z(t)$ の分布特性は未知であるので，非ガウス性の場合に式（６）を厳密に評価することは困難である．したがって，本研究では以下に示す準解析解算定手法を用いることとする．

Step（１）．$\dfrac{dz(t)}{dt}=f[t,z(t)]+\boldsymbol{G}(t)w(t)$ から，サンプル実現値：$z^*(t)$ を作成する．

Step（２）．$\boldsymbol{y}^*(k)=\boldsymbol{H}z^*(k)+\boldsymbol{v}(k)$，$(k=k\Delta t)$ を観測データとして，最適推定値：$\hat{z}(k)$ のまわりで等価なガウス分布：$N(\hat{z}(k),P(k|k))$ に近似する．$\boldsymbol{P}(k|k)$：推定誤差共分散行列である．ここでは，疑似線形化カルマンフィルタを用いることとする(2)．

キーワード：初期通過確率，カルマンフィルタ，動的信頼性，モンテカルロ法
連絡先：〒158-8557　世田谷区玉堤 1-28-1，TEL 03-3703-3111　FAX 03-5707-2187

Step（３）．式（６）の積分を行い，継続時間における信頼性：P_S を求める．

ここで，$\boldsymbol{r}=\{z(k)\ z(k+1)\}^T$ および $\hat{\boldsymbol{r}}=\{\hat{z}(k)\ \hat{z}(k+1)\}^T$ とおくと，

$$\boldsymbol{R}_r=E\left[(r-\hat{r})(r-\hat{r})^T\right]=\begin{bmatrix}\boldsymbol{P}(k|k) & \boldsymbol{P}_{k,k+1}\\ \boldsymbol{P}^T{}_{k,k+1} & \boldsymbol{P}(k+1|k+1)\end{bmatrix} \qquad （７）$$

式（７）において，$\boldsymbol{P}(k|k)=E\left[(z(k)-\hat{z}(k|k))(z(k)-\hat{z}(k|k))^T\right]$ は，推定誤差共分散行列である．

また，$\boldsymbol{P}_{k,k+1}=E\left[\{z(k)-z(k|k)\}\{z(k+1)-z(k+1|k+1)\}^T\right]$ は，解析的に次式で与えられる．

$$\boldsymbol{P}_{k,k+1}=\boldsymbol{P}(k|k)\boldsymbol{\Phi}^T(k+1,k)\{\boldsymbol{I}-\boldsymbol{K}(k+1)\boldsymbol{H}(k+1)\}^T \qquad （８）$$

ここで，$\boldsymbol{\Phi}^T(k+1,k)$ ：遷移行列，$\boldsymbol{K}(k+1)$ ：Kalman ゲインである．
以上より，$z(k)$ と $z(k+1)$ の結合ガウス密度関数は，次式で与えられる．

$$f(z(k),z(k+1))=f(\boldsymbol{r})=\frac{1}{(2\pi)^n\left|\boldsymbol{R}_r\right|^{1/2}}\exp\left\{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{r}-\hat{\boldsymbol{r}})^T\boldsymbol{R}_r^{-1}(\boldsymbol{r}-\hat{\boldsymbol{r}})\right\} \qquad （９）$$

$\boldsymbol{r}=\{z(k)\ z(k+1)\}^T$ を線形変換：$\eta=\boldsymbol{A}\boldsymbol{r}$ により互いに相関を持たない：η に変換する．同様に $\hat{\eta}=\boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{r}}$ とすると，

$$f(\eta)=\frac{1}{(2\pi)^n\left|\boldsymbol{R}_\eta\right|^{1/2}}\exp\left\{-\frac{1}{2}(\eta-\hat{\eta})^T\boldsymbol{R}_\eta^{-1}(\eta-\hat{\eta})\right\} \qquad （１０）$$

ここで，$\boldsymbol{R}_\eta=E\left[(\eta-\hat{\eta})(\eta-\hat{\eta})^T\right]=\boldsymbol{A}E\left[(\boldsymbol{r}-\hat{\boldsymbol{r}})(\boldsymbol{r}-\hat{\boldsymbol{r}})^T\right]\boldsymbol{A}^T=\boldsymbol{A}\boldsymbol{R}_r\boldsymbol{A}^T$，$\boldsymbol{A}$ ：$\boldsymbol{R}_r$ の固有ベクトルとして与えられる．次に，$\xi_i=(\eta_i-\hat{\eta}_i)/\sigma_{\eta i}$ と変換すると，ξ_i は，互いに独立（無相関）な $N(0,1)$ となるので，容易に式（６）の分子の積分を行うことができる．また，$\int_{-\lambda}^{\lambda}f(z(k))dz(k)$ の積分も同様にして行うことが出来る．

Step（４）．ここまでは，１サンプルについての解析結果なので，Step(1)－(3)の流れを所定のＮ回繰り返し計算し，$P_{f,N}=(1/N)\sum_{i=1}^{N}P_f^{(i)}$ を計算する．

３．数値計算例

数値計算の際, 式（１）における入力は 0-10Ｈｚの周波数帯域で一様なパワーを有する平均値０, 分散 1.0E4 のガウス白色雑音とし，時間刻み:0.01 秒，継続時間:T=10 秒とした．非線形復元力特性は，次式の Bouc and Wen モデルを用いた．式（１１）において，$A=1.0,\beta=0.1,\gamma=0.1,n=1.0,h=0.05,\omega_0=7.07(rad/\sec)$ とした．

$$\dot{\phi}(\dot{x}(t),x(t))=A\dot{x}(t)-\beta\left|\dot{x}(t)\right|\left|\phi(\dot{x}(t),x(t))\right|^{n-1}\phi(\dot{x}(t),x(t))-\gamma\dot{x}(t)\left|\phi(\dot{x}(t),x(t))\right|^n \qquad （１１）$$

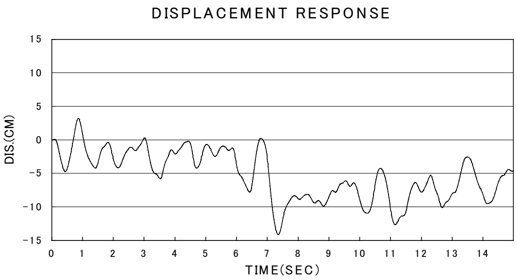

図-1. 変位応答時系列の1サンプル

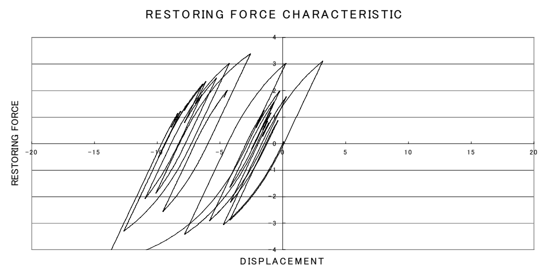

図-2. 復元力特性

図-1 に変位応答時系列の１サンプルを示し，図-2 は，１サンプル実現値の復元力特性を示した．あらかじめ式（１）から一度応答の時系列を作成し，その標準偏差：σ を求め，各状態量のしきい値を設定した．図-3 に破壊確率の算定結果を示す．図-3 において，PAM は，本研究で提案する準解析解算定手法による N=1000 回の結果を示している．図-3 の縦軸は対数軸を用い，横軸は σ の何倍をしきい値として用いたことを示している．比較のためにモンテカルロ法を 10 万回適用して求めた破壊確率を示している．

本研究で設定した破壊確率の範囲内ではあるが提案手法の有効性が認められるものと思われる．

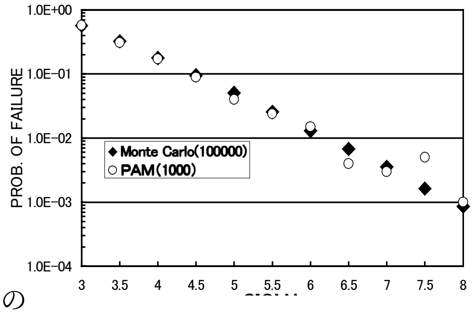

図-3. 破壊確率

参考文献：(1).M.Hoshiya and K.Komiya: Pseudo Analytical Method for Stochastic Nonlinear Systems, Proc. of Fourth Int. Conf. on Stochastic Structural Dynamics-SSD’98, pp.187-196, August, 1998.(2).砂原善文：確率システム理論Ⅱ，朝倉書店，1982.