一様引張りを受ける鋼材の頂上分岐点に関する研究

東北大学大学院　学生員　生出 佳　　東北大学　正会員　池田 清宏
東北大学　正会員　寺田 賢二郎　東北大学　正会員　岡澤 重信

1.　はじめに

原子の結晶格子[1)]や金属材料の力学的な材料不安定時に外力の極大点と分岐点が非常に接近して生じることが知られている．Thompson と Schorrok による研究[1)]では，近接する二つの特異点を頂上分岐点によって近似し，弾性安定理論を用いて，頂上分岐点が局所的に区分線形な初期不整感度を持っていることを示した．

Koiter は単純特異点における初期不整感度則を示した．これはのちに Thompson および Hunt によって一般的な特異点に応用された．構造形状に依らない支配的な初期不整は Ikeda および Murota によって定式化された[2)]．

本研究では，弾塑性を考慮した鋼材の一様引張りに対する，頂上分岐点における挙動に関して示した．またそのためにいくつかの定式化について簡単に説明を示した．

2.　定式化

ここでは定式化の簡単な説明を示す．

(1)　分岐方程式

ポテンシャル系の頂上分岐点における局所挙動と不完全系での挙動を Thompson と Schorrok[1)]の弾性理論を拡張して示す．

頂上分岐点とは，極値と対称分岐点が同時に生じる 2 重特異点と定義する．2 重分岐点に対し，分岐方程式は次のようになる．

$$\begin{aligned}&\widehat{F}_1(w_1,w_2,\widetilde{f},\epsilon)\\&\quad=A_{3000}{w_1}^3+2B_{2000}w_1w_2+A_{1010}w_1\widetilde{f}\\&\qquad+A_{0001}\epsilon+\mathrm{h.o.t.}=0,\end{aligned}\tag{1}$$

$$\begin{aligned}&\widehat{F}_2(w_1,w_2,\widetilde{f},\epsilon)\\&\quad=B_{2000}{w_1}^3+B_{0200}{w_2}^2+B_{0010}\widetilde{f}\\&\qquad+B_{0001}\epsilon+\mathrm{h.o.t.}=0\end{aligned}\tag{2}$$

ここで，$w_1,w_2,\widetilde{f},\epsilon$はそれぞれ，2 つの変位，荷重パラメータ，初期不整の大きさである．A,B は係数である．また，式 (1) は対称分岐点に関連し，式 (2) は極値に関連するとする．さらに，分岐方程式のヤコビアン$\widehat{J}$が対称であるとして，$A_{1100}=2B_{2000}$である．本研究では，Thompson および Schorrok[1)]が考慮した$A_{0001}\epsilon$にくわえて，$B_{0001}\epsilon$の項も考慮した．初期不整の大きさϵに関する項は，初期不整パターンベクトル$\boldsymbol{d}$，初期不正感度マトリックス B，$\widehat{J}$の固有ベクトル$\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2$によって次のように表される．

$$A_{0001}={\boldsymbol{\eta}_1}^{\mathrm{T}}B^0_{\mathrm{c}}\boldsymbol{d},\qquad B_{0001}={\boldsymbol{\eta}_2}^{\mathrm{T}}B^0_{\mathrm{c}}\boldsymbol{d}\tag{3}$$

ただし $(\cdot)_{\mathrm{c}}$で表される変数は特異点での値をあらわし，$(\cdot)^0$で表される変数は完全系のものであることを示す．特異点 $(\boldsymbol{u}_{\mathrm{c}},f_{\mathrm{c}})$ において，ヤコビアンはゼロ固有値をもつ．

$$\det\widehat{J}_{\mathrm{c}}=0\tag{4}$$

(2)　初期不整感度則

頂上分岐点での特異荷重および特異変位の初期不整感度則は，式 (1)，(2)，(4) を解くことによって次のように得られる．

$$\widetilde{f}_{\mathrm{c}}\sim-\frac{B_{2000}}{B_{0010}}\left(\frac{B_{0200}}{{B_{2000}}^3}\right)^{1/2}|A_{0001}\epsilon|-\frac{B_{0001}}{B_{0010}}\epsilon,\tag{5}$$

式 (5) は式 (3) により次のように単純化される．

$$\begin{aligned}\widetilde{f}_{\mathrm{c}}&\sim-C_1|A_{0001}\epsilon|+C_2B_{0001}\epsilon\\&=-C_1|\epsilon||{\boldsymbol{\eta}_1}^{\mathrm{T}}B^0_{\mathrm{c}}\boldsymbol{d}|+C_2\epsilon{\boldsymbol{\eta}_2}^{\mathrm{T}}B^0_{\mathrm{c}}\boldsymbol{d}\end{aligned}\tag{6}$$

ここに，C_1,C_2は$\boldsymbol{d}$に依存しない正定数であり，次のように定義される．

$$C_1=\frac{B_{2000}}{B_{0010}}\left(\frac{B_{0200}}{{B_{2000}}^3}\right)^{1/2}>0,\ C_2=-\frac{1}{B_{0010}}>0\tag{7}$$

(3)　特異荷重点の確率分布

初期不整$\epsilon\boldsymbol{d}$が平均$\boldsymbol{0}$，分散ϵ^2W の正規分布 $\mathrm{N}(\boldsymbol{0},\epsilon^2W)$ に従うときの式 (6) の$\widetilde{f}_{\mathrm{c}}$の確率密度関数は次のようになる．

$$\phi(\widetilde{f}_{\mathrm{c}})=\frac{2}{\sqrt{2\pi}\hat{\sigma}}\exp\left(-\frac{\widetilde{f}_{\mathrm{c}}^2}{2\hat{\sigma}^2}\right)\Phi_{\mathrm{N}}\left(-\frac{r}{\hat{\sigma}}\widetilde{f}_{\mathrm{c}}\right)\tag{8}$$

ここに，A_{0001}と B_{0001}が平均 0，分散${\sigma_1}^2,{\sigma_2}^2$の正規分布に従うことから，

$$\hat{\sigma}^2=({C_1}^2{\sigma_1}^2+{C_2}^2{\sigma_2}^2)\epsilon^2,\quad r=\frac{C_1\sigma_1}{C_2\sigma_2},\tag{9}$$
$$k=\frac{\hat{\sigma}^2}{{\sigma_1}^2{\sigma_2}^2{C_2}^2\epsilon^2},\quad m=C_1|\epsilon|\frac{{\sigma_1}^2}{\hat{\sigma}^2}$$

となる．ただし$\hat{\sigma}>0$とする．さらに，

$$\Phi_{\mathrm{N}}(\zeta)=\int_{-\infty}^{\zeta}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(\frac{-\zeta^2}{2}\right)\mathrm{d}\zeta\tag{10}$$

である．

$r=0$ のとき，式 (8) は正規分布 $\mathrm{N}(0,{C_2}^2{\sigma_2}^2\epsilon^2)$ に従う．また，$r\to+\infty$ のときは，$\widetilde{f}_{\mathrm{c}}<0$ で $2\mathrm{N}(0,{C_1}^2{\sigma_1}^2\epsilon^2)$ に従い，$\widetilde{f}_{\mathrm{c}}>0$ で 0 となる．

$\widetilde{f}_{\mathrm{c}}$の平均と分散は次式で表される．

$$\mathrm{E}[\widetilde{f}_{\mathrm{c}}]=-\sqrt{\frac{2}{\pi}}C_1\sigma_1\epsilon\tag{11}$$

$$\mathrm{Var}[\widetilde{f}_{\mathrm{c}}]=\mathrm{E}[\widetilde{f}_{\mathrm{c}}^2]-\left(\mathrm{E}[\widetilde{f}_{\mathrm{c}}]\right)^2=\hat{\sigma}^2-\frac{2}{\pi}{C_1}^2{\sigma_1}^2\epsilon\tag{12}$$

3.　解析例

ここでは，分岐挙動について説明した 2. 節を一様引張りを受ける鋼材の弾塑性分岐挙動に適応する．解析モデル

Key Words: 頂上分岐，分岐理論，初期不正感度則，確率分布
〒 980-8579 仙台市青葉区新巻字青葉 06　東北大学大学院工学研究科土木工学専攻 Tel.022-217-7420 Fax.022-217-7418

は **Fig.1** に示す通りである．

(1)　解析方法

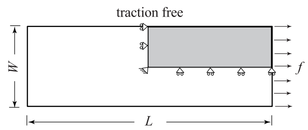

Fig.1 Rectangular analysis domain with the specification of boundary conditions

平面ひずみ状態とし，一般的な有限要素解析法を用いた [3),4)]．金属材料は等方ひずみ効果を考慮した J_2流れ則に従う．Kirchhoff 応力の Jaumann 速度$\overset{\nabla}{\boldsymbol{\tau}}$に関連した弾塑性構成則を用い，変形速度テンソル$\boldsymbol{D}$は$\overset{\nabla}{\boldsymbol{\tau}} = \boldsymbol{c}^{\mathrm{ep}} : \boldsymbol{D}$で表される．ここに，対称な弾塑性係数$\boldsymbol{c}^{\mathrm{ep}}$は次のように表される．

$$\boldsymbol{c}^{\mathrm{ep}} = \boldsymbol{c}^{\mathrm{e}} - \frac{9G^2}{3G + H'} \left(\frac{1}{\bar{\sigma}^2} \right) (\boldsymbol{\sigma'} \otimes \boldsymbol{\sigma'}), \qquad (13)$$

ただし，$\boldsymbol{c}^{\mathrm{e}}$は弾性係数である．ヤング率は $E = 200GPa$，ポアソン比$\nu = 0.333$，式 (13) 中の硬化係数 H'は次式を微分することで得られる．

$$\bar{\sigma} = \sigma_{\mathrm{Y}} \left(1 + \frac{\bar{e}^{\mathrm{p}}}{e_{\mathrm{Y}}} \right)^{0.0625} > 0, \qquad (14)$$

ここに，有効塑性ひずみ$\bar{e}^{\mathrm{p}}$を独立変数と仮定する．本解析では $e_{\mathrm{Y}} = \sigma_{\mathrm{Y}}/E = 1/500$ と仮定し，初期降伏応力を $\sigma_{\mathrm{Y}} = 400MPa$ とする．また対称性を利用して，全体の 1/4 のみの解析を行った．頂上分岐点は，$L/W = 10$ のときであった．

(2)　初期不整感度則

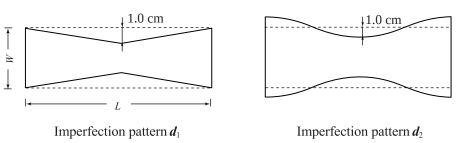

Fig.2 Imperfection patterns imposed on the specimens ($\epsilon = 0.0 \sim 0.1$)

Fig.2 に見られるような初期不整パターンベクトル$\boldsymbol{d} = \boldsymbol{d}_1, \boldsymbol{d}_2$に対して，初期不整の大きさを$\pm\epsilon = 0 \sim 0.1$ に変化させて，初期不整感度則について調べることにする．

まず$\boldsymbol{d} = \boldsymbol{d}_1$の場合，中央から対称に直線的に変形しているので，式 (3) において $A_{0001} \neq 0, B_{0001} \neq 0$ の場合に相当する．一方$\boldsymbol{d} = \boldsymbol{d}_2$の場合は，1 つ目の分岐モードに対応した曲線的な変形をしているので，$A_{0001} \neq 0, B_{0001} = 0$ の場合に相当する．

$\boldsymbol{d} = \boldsymbol{d}_1 (A_{0001} \neq 0, B_{0001} \neq 0)$ の場合の特異荷重$\widetilde{f}_{\mathrm{c}}$と初期不整の大きさ$\epsilon$の関係を **Fig.3**(a) に示す．$\epsilon = 0$ からの区分線形関係になっていることがわかる．$\epsilon > 0$ のときの関係と，$\epsilon < 0$ のときの関係が違う傾きを持っている．このことは，式 (5) によく一致する．

$\boldsymbol{d} = \boldsymbol{d}_2 (A_{0001} \neq 0, B_{0001} = 0)$ の場合の特異荷重$\widetilde{f}_{\mathrm{c}}$と$\epsilon$の関係を **Fig.3**(b) に示す．$\epsilon = 0$ から$\widetilde{f}_{\mathrm{c}}$軸に関して対称な区分線形関係になっており，このことは，式 (5) の $B_{0001} = 0$ の場合によく一致する．

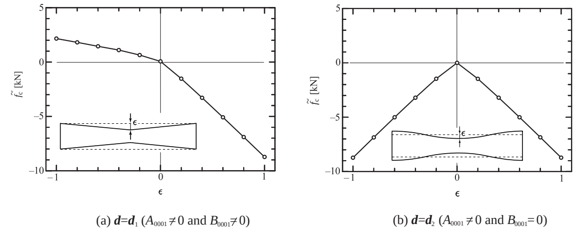

Fig.3 $\tilde{f}_c$ versus ϵ relationship

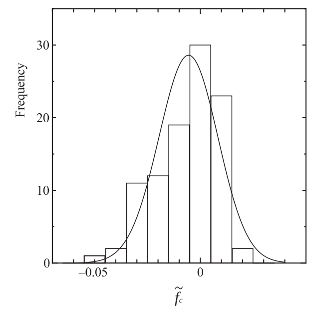

Fig.4 Comparison of the histogram and the theoretical probability density function for Cases A and B

(3)　強度の確率分布

初期不整パターンベクトルを$\boldsymbol{d} = \boldsymbol{d}_1$とし，初期不整の大きさ$\epsilon$を 100 のランダムな値で与えたときの鋼材の強度をヒストグラムにして表すと，**Fig.4** のようになる．また，式 (8) の平均 $\mathrm{E}[\widetilde{f}_{\mathrm{c}}]$ をサンプル平均 $\mathrm{E_s}[\widetilde{f}_{\mathrm{c}}] = -5.75627 \times 10^{-3}$で近似し，分散 $\mathrm{Var}[\widetilde{f}_{\mathrm{c}}]$ をサンプル分散 $\mathrm{Var_s}[\widetilde{f}_{\mathrm{c}}] = 1.950403 \times 10^{-4}$で近似する．式 (11)，(12) より次式が得られる．

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\mathrm{Var_s}[\widetilde{f}_{\mathrm{c}}] + (\mathrm{E_s}[\widetilde{f}_{\mathrm{c}}])^2} = 0.0151053 \qquad (15)$$

$$r = \sqrt{\frac{\pi(\mathrm{E_s}[\widetilde{f}_{\mathrm{c}}])^2}{2(\mathrm{Var_s}[\widetilde{f}_{\mathrm{c}}] + (\mathrm{E_s}[\widetilde{f}_{\mathrm{c}}])^2) - \pi(\mathrm{E_s}[\widetilde{f}_{\mathrm{c}}])^2}} = 0.543618 \qquad (16)$$

これらを式 (8) に代入すると，特異荷重 f_{c}の確率密度関数が **Fig.4** の実線で表される．確率密度関数と，ヒストグラムがよく一致していることがわかる．

4.　結論

一様引張りを受ける鋼材の頂上分岐点および分岐点付近における不完全系の挙動について，簡単な定式化を含めて示した．特に，特異点および特異荷重の確率変動は工学的な重要性を持つ．構造部材の力学的な不安定問題にはこのような分岐点が考慮されるので，今後さらに実際的な問題に対して適応を試みるべきである．

参考文献

1) Thompson, J.M.T. and Schorrock, P.A. (1975) Bifurcation instability of an atomic lattice. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* **23**, 21–37.
2) Ikeda, K. and Murota, K. (1990) Critical initial imperfection of structures. *Int. J. Solids Struct.* **26**(8), 865–886.
3) Bathe, K.J. (1996) *Finite Element Procedures.* Prentice-Hall, Englewood Cliffs.
4) Simo, J.C. and Hughes, T.J.R. (1998) *Computational Inelasticity.* Springer-Verlag, New York.