平面歪状態における極異方性板の熱弾性ポテンシャル

北見工業大学　フェロー　奥村　勇

１．まえがき　最近の２次元或いは３次元弾性問題の研究は、異方性体、複合材料及び機能性材料に向う様になった。しかも、古典的な応力解析の問題から、inclusion, cavity 或いは crack に関する問題に研究が進展している。とはいえ、異方性体の境界値問題であれば、その異方性体に関する弾性解の発見が必要不可欠になる。著者は、長い間、物体力を伴う円柱直交異方性体の３次元弾性解に関する研究を行って来たが、未だに厳密解を得ていない。然しながら、物体力を温度に置き換え、更に、３次元弾性問題を２次元化した場合には、２次元熱弾性ポテンシャルが比較的容易に得られることが分かった。

本研究は、物体力を伴う円柱直交異方性体に関する３次元弾性解の特別な場合として、平面歪状態における極異方性（曲線直交異方性）板の熱弾性ポテンシャルを厳密に求めるものである。

２．変位の方程式　熱を考慮した極異方性板の応力－歪関係は、次式で表さられる。

$$\sigma_{rr}=c_{11}\varepsilon_{rr}+c_{12}\varepsilon_{\theta\theta}-\beta_1 T,\quad \sigma_{\theta\theta}=c_{12}\varepsilon_{rr}+c_{22}\varepsilon_{\theta\theta}-\beta_2 T,\quad \sigma_{\theta z}=\sigma_{zr}=0,\quad \sigma_{r\theta}=2c_{66}\varepsilon_{r\theta} \tag{1a–d}$$

ここで、σ_{ij}，c_{ij}，ε_{ij} および T は、それぞれ、応力成分、弾性定数、歪成分及び温度変化を表す。

式(1a,b,d)の応力成分を、歪－変位関係を用いて変位成分で表し、それらを極座標における応力のつり合い方程式に代入すると、変位の方程式が次の様に得られる。

$$c_{11}\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2}+c_{11}\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial r}+c_{66}\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u_r}{\partial\theta^2}-c_{22}\frac{u_r}{r^2}-(c_{22}+c_{66})\frac{1}{r^2}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}+(c_{12}+c_{66})\frac{1}{r}\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r\partial\theta}$$
$$=\beta_1\frac{\partial T}{\partial r}+(\beta_1-\beta_2)\frac{T}{r} \tag{2a}$$

$$c_{66}\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2}+c_{66}\frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial r}+c_{22}\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial\theta^2}-c_{66}\frac{u_\theta}{r^2}+(c_{66}+c_{12})\frac{1}{r}\frac{\partial^2 u_r}{\partial r\partial\theta}+(c_{66}+c_{22})\frac{1}{r^2}\frac{\partial u_r}{\partial\theta}=\frac{\beta_2}{r}\frac{\partial T}{\partial\theta} \tag{2b}$$

ここで、u_i は、変位成分を表す。

３．熱弾性ポテンシャルの支配方程式　式(2a,b)における変位成分を熱弾性ポテンシャル ϕ 及び ψ により、次の様に表す。

$$u_r=\frac{\partial\phi}{\partial r},\quad u_\theta=\frac{j}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}+\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta} \tag{3a,b}$$

ここで、j は、後に定められる係数である。式(3a,b)を式(2a,b)に代入すると、熱弾性ポテンシャルの支配方程式が、次式の様に得られる。

$$c_{11}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial r}+\frac{c_{66}+j(c_{12}+c_{66})}{c_{11}}\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2}+\frac{c_{12}+c_{66}}{c_{11}}\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2}\right)+\frac{1}{r}\left[(c_{11}-c_{22})\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial r}\right.$$
$$\left.+\left[2c_{66}+j(c_{12}-c_{22})\right]\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2}+(c_{12}-c_{22})\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2}\right]=\beta_1\frac{\partial T}{\partial r}+(\beta_1-\beta_2)\frac{T}{r} \tag{4a}$$

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial r}+\frac{c_{22}j}{c_{66}j+c_{66}+c_{12}}\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2}+\frac{1}{c_{66}j+c_{66}+c_{12}}\left[(c_{22}-c_{12}-2c_{66}j)\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial r}+c_{66}\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}-c_{66}\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}\right.$$
$$\left.+c_{22}\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2}\right]=\frac{\beta_2}{c_{66}j+c_{66}+c_{12}}T \tag{4b}$$

式(4a,b)を簡単にするために、今、次の様に置く。

$$j=\frac{c_{11}\mu-c_{66}}{c_{12}+c_{66}},\quad \frac{c_{22}j}{c_{66}j+c_{66}+c_{12}}=\mu \tag{5a,b}$$

キーワード：熱弾性，異方性，極異方性板，熱弾性ポテンシャル，平面歪状態.

住所：〒090-8507，北見市公園町 165 番地，Tel. (0157)26-9472, Fax. (0157)23-9408.

式(5a)を式(5b)に代入すると、μに関する次の２次方程式を得る。

$$c_{11}c_{66}\mu^2+\left[c_{12}\left(c_{12}+2c_{66}\right)-c_{11}c_{22}\right]\mu+c_{22}c_{66}=0 \tag{6}$$

上式の二つの根をμ_1及びμ_2で表すと、式(3b)に含まれる係数は、次の様に定められる。

$$j_1=\frac{c_{11}\mu_1-c_{66}}{c_{12}+c_{66}},\quad j_2=\frac{c_{11}\mu_2-c_{66}}{c_{12}+c_{66}} \tag{7a,b}$$

式(5a,b)を式(4a,b)に代入して整頓すると、結果としての熱弾性ポテンシャルの支配方程式が、次の様に得られる。

$$L_1\psi=F_1,\quad L_2\psi=F_2 \tag{8a,b}$$

ここで、

$$L_1=\left(r\frac{\partial}{\partial r}+\frac{c_{12}-c_{22}}{c_{12}+c_{66}}\right)\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2},\quad L_2=r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{c_{22}}{c_{66}}\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} \tag{9a,b}$$

$$F_1=-\frac{c_{11}}{c_{12}+c_{66}}\left\{r\frac{\partial\Phi}{\partial r}+\frac{c_{11}-c_{22}}{c_{11}}\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial r}+\frac{2c_{66}+j\left(c_{12}-c_{22}\right)}{c_{11}}\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2}-\frac{1}{c_{11}}\left[\beta_1 r\frac{\partial T}{\partial r}+\left(\beta_1-\beta_2\right)T\right]\right\} \tag{10a}$$

$$F_2=-\frac{1}{c_{66}}\left[\left(c_{66}j+c_{66}+c_{12}\right)\Phi+\left(c_{22}-c_{12}-2c_{66}j\right)\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial r}-\beta_2 T\right] \tag{10b}$$

$$\Phi=\frac{\partial^2\phi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial r}+\frac{\mu}{r^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2} \tag{11}$$

４．解　式(8a,b)の連成を解くと、次の解を得る。

$$\begin{aligned}&\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{3}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{c_{22}}{c_{66}}\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right)\left[r\frac{\partial\Phi}{\partial r}+\frac{c_{11}-c_{22}}{c_{11}}\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial r}+\frac{2c_{66}+j\left(c_{12}-c_{22}\right)}{c_{11}}\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2}\right]-\frac{c_{12}+c_{66}}{c_{66}}\\&\quad\times\frac{c_{66}j+c_{66}+c_{12}}{c_{11}}\left(r\frac{\partial}{\partial r}+\frac{c_{12}-c_{22}}{c_{12}+c_{66}}+2\right)\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\left[\Phi+\frac{c_{22}-c_{12}-2c_{66}j}{c_{66}j+c_{66}+c_{12}}\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial r}\right]\\&\quad=\frac{1}{c_{11}}\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{3}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{c_{22}}{c_{66}}\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right)\left[\beta_1 r\frac{\partial T}{\partial r}+\left(\beta_1-\beta_2\right)T\right]-\frac{c_{12}+c_{66}}{c_{66}}\frac{\beta_2}{c_{11}}\left(r\frac{\partial}{\partial r}+\frac{c_{12}-c_{22}}{c_{12}+c_{66}}+2\right)\\&\quad\times\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial\theta^2}\end{aligned} \tag{12a}$$

$$\begin{aligned}\left(r\frac{\partial}{\partial r}+\frac{c_{12}-c_{22}}{c_{12}+c_{66}}\right)\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2}=&-\frac{c_{11}}{c_{12}+c_{66}}\left\{r\frac{\partial\Phi}{\partial r}+\frac{c_{11}-c_{22}}{c_{11}}\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial r}+\frac{2c_{66}+j\left(c_{12}-c_{22}\right)}{c_{11}}\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2}\right.\\&\left.-\frac{1}{c_{11}}\left[\beta_1 r\frac{\partial T}{\partial r}+\left(\beta_1-\beta_2\right)T\right]\right\}\end{aligned} \tag{12b}$$

式(12a)からϕを求め、それを式(12b)の右辺に代入してψを求めることになる。極異方性体の場合には、等方性体とは異なり、熱弾性ポテンシャルが二つ必要になる様である。

５．あとがき　式(8a,b)は、式(1a-d)から始めて、機械的な演算により比較的容易に得られるが、その連成を解くためには、或る工夫が必要になる。また、式(12a,b)の解を等方性体に特殊化した場合には、ϕは、Goodierの熱弾性ポテンシャルに一致し、ψは、０となって熱弾性ポテンシャルには関係しない。微分演算子を用いても、直交座標以外では、微分演算子の積の順序を変えると、異なった値を取り、機械的な演算のみでは、微分方程式が処理できなくなる。円柱直交異方性体の３次元弾性解の難しさも、まさにその点にある。式(8a,b)の連成を解く過程及び式(12a,b)の解を等方性体に特殊化する過程については、講演会当日に報告する。