

CS-79

準乱数と単純GAを用いた効率化積分の開発

阿南高専・専攻科 正 松保明憲(重之)

阿南高専・専攻科 学 ○武田芳和

1. まえがき 一般に、対象システムは微分方程式で表されることが多く、合理的なモデル化を行おうとすると多数の助変数に関する多重積分の実行が必要不可欠である。効率化モンテカルロ法を用いても16次元程度の多重積分が実用上限界であると言われている。本研究では、高次元の多重積分に関する基礎的研究として、ヒトマヤの考案した準乱数とGA(遺伝的アルゴリズム)を援用した効率的な積分法の開発を行い、その有効性を数値計算例によって示す。

2. 準乱数を用いたモンテカルロ積分法 通常の乱数を用いたモンテカルロ法では N 個の乱数に対し、厳密解との誤差が $N^{-1/2}$ でしか収束しないので非効率である。しかし、ヒトマヤが考案した準乱数を用いれば、効率良く近似解を求めることができる。この方法は、ヒトマヤの考案した準乱数数列 $\xi_n = ([n\alpha_1], [n\alpha_2], \dots, [n\alpha_k])$ (式中 $n=0, 1, \dots$) を用いて、変数ベクトル $\vec{x} = (x_1, \dots, x_k)$ の積分値 $I = \int \dots \int f(\vec{x}) d\vec{x}$ を $I \approx S(N) = \sum_{n=0}^{N-1} C_n f([n\alpha_1], [n\alpha_2], \dots, [n\alpha_k])$ の形で近似評価するもの¹⁾である。ここで、 k は積分の次元数、記号 $[\cdot]$ はその数値の小数点以下の値、係数 α_j ($j=1, \dots, k$) は $0 \sim 1$ の実数の定数である。また、 C_n は $N \rightarrow \infty$ のとき、多重積分の厳密解 I となるように定める定数である。特に、簡単な場合として式(1)を考えた場合、 $S(N)$ の誤差は N^{-2} で収束し、効率の良い計算が可能である。

$$S(N) = \frac{1}{(N+1)^2} \sum_{n=N}^N (N+1-|n|) f([n\alpha_1], \dots, [n\alpha_k]) \quad (1)$$

式中の係数 α_j ($j=1, \dots, k$) は、近似解 $S(N)$ の誤差が最小となるように数値実験によって求められるが、高次元の場合、この計算には膨大な時間が必要となる。そこで本研究では、高次元積分に要する係数 α_j を効率的に求めるために単純GAを用いる。

3. GAによる最適係数の探索 ここでは、GAに基づき最適係数 α_j を求める方法の概略について説明する。

3.1 GA²⁾の概要³⁾ GAでは、当該問題の解(表現型と呼ばれる)を、生物の染色体と同様の符号列(遺伝子型と呼ばれる通常は1次元コードで表される)で表し、この符号列に生物進化のアルゴリズムを適用することによって最適化問題等の解決を図っている。単純GAは、増殖・淘汰、交差および突然変異の3つの基本的な演算から構成される。単純GAの流れ図を、Fig.1に示す。

3.2 最適係数の探索 本研究では、単純GAを用いて多重積分の誤差が最小となるように式(1)中の係数 α_j ($j=1, \dots, k$) を求める。誤差は、{(多重積分の近似評価値)-(多重積分の厳密解)}² で評価する。準乱数を用いたモンテカルロ法においては $N=1$ 万とする。また、GAの計算においては、個体総数を20、遺伝子のビット長を30、交差の生起確率を0.4、突然変異率を0.04とした。交差の生起確率、突然変異率に関しては、低次元積分における α_j の探索時に効率良く計算できる値を求め、それらを用いた。GAの終了条件は、適応度の収束状況に関係なく世代交代数10で強制終了させた。次に、 α_j の探索方法を n 次元の多重積分の場合について述べる。求めようとする解は10進数なので、この表現型をそのまま2進数に変換し、それを遺伝子型とした。 α_j の探索においては、 $\alpha_j(1, \dots, n)$ のうち $\alpha_j \sim \alpha_n$ の $n-1$ 個の $\alpha_j(2, \dots, n)$ に $0 \sim 1$ の適当な初期値を与え、 α_1 についてのみ探索計算を行い、 α_1 の1次近似解を求める。次に、その解 α_1 と $\alpha_j(3, \dots, n)$ の初期値を用いて α_2 についても最適化を行い、 α_2 の1次近似解を求める。以下同様にして $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ の1次近似解を求める。さらに同様に、各 α_j のみに着目して最適化を行い、 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ の2次近似解を求め、収束するまで同様の手順を繰り返した。

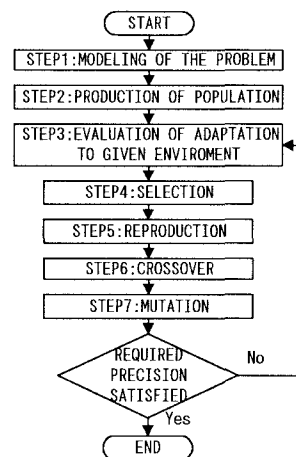


Fig.1 Flow Chart of Simple GA

キーワード: 準乱数, GA, 多重積分, 効率化

住所: 阿南市見能林町青木 265 Tel.&Fax.0884-23-7203

4. 数値計算例 以上の条件で効率化積分の開発を試みた。MMX Pentium 200MHz 上で MS Visual C++を用いた。

4.1 初等関数の多重積分

厳密解を容易に求めることができる次式のような20次元積分を考える。

$$I_1 = \int \cdots \int e^{x_1} \cdots e^{x_{20}} dx_1 \cdots dx_{20} \quad (2) \quad I_2 = \int \cdots \int x_1 \cdots x_{20} dx_1 \cdots dx_{20} \quad (3) \quad I_3 = \int \cdots \int x_1 x_2^2 x_3 x_4^2 \cdots x_{19} x_{20}^2 dx_1 \cdots dx_{20} \quad (4)$$

$I_1 \sim I_3$ の積分範囲は、いずれの積分変数についても0~1とし、 I_3 の被積分関数は偶数番目の積分変数のみが2乗となる関数である。 I_1 と I_2 を用いて誤差が最小となるような α_j を求め、その係数を準乱数に適用して $I_1 \sim I_3$ の積分を行った。求めた係数 α_j をTable 1に、そして、それらの係数 α_j を用いて評価した積分値をTable 2に示す。Table 2より、 I_1 と I_2 については精度良く求めることができた。当該積分用の α_j を用いていない I_3 についても工学応用上有意義な精度で求めることができた。 α_j の探索時間は7時間程であるが、一度 α_j を求めると種々の積分評価が短時間で可能($I_1 \sim I_3$ の場合15秒以内)であり、非常に便利であることも確認できた。

4.2 正規確率積分 本手法は、信頼性解析を行う場合に必要となる多次元正規分布の積分にも適用可能である。高次元正規分布の多重積分に関する精度は効率化モンテカルロ法などを用いて検討可能であるが、ここでは基本的かつ精度が一般の文献⁴⁾で確認できる2次元正規分布の結果を示す。先の数値計算より、精度を厳密に追求しないのであれば、係数 α_j の値を対象外の被積分関数の積分に適用しても工学応用上有意義な精度で解が得られることが確認できた。そこでまず、ここで求めた α_j が被積分関数あるいは相関係数 ρ の値に関係なく広く適用可能であることを確認した。非相関正規分布の場合は、高次元積分の厳密解を容易に求めることができる。そこで、相関を有する正規分布の数値積分に必要な係数 α_j は、非相関正規分布の積分における係数 α_j とほぼ一致するものと仮定した。以上の条件下で、種々の ρ の値に対し、次式(5)の二重積分

$$I_4 = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \times \int_{-2.5}^2 \int_{-2.5}^2 \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(x_1^2 - 2\rho x_1 x_2 + x_2^2)\right\} dx_1 dx_2 \quad (5)$$

を評価した結果をTable 3中の“Calculation by Proposed Method”の欄に示す。同表には、計算精度の確認のために文献⁴⁾で与えられている厳密解も示している。また参考のために、文献¹⁾で求められている係数 α_j を用いた場合の近似解も示している。表より、正規分布の確率密度の関数形が急激な変化を有する大きな相関係数 ρ の場合には若干の誤差が見られるが、本開発手法によれば、厳密解にほぼ近い計算結果を得ることができることが分かる。

5. まとめ

高次元多重積分の効率化法の開発を行った。そして数値計算により、数十次元の積分を実用的な時間・精度で求めることができることを示した。講演当日は、地震外乱が作用する1自由度質点系の動的信頼性解析⁵⁾に本手法を適用した興味ある解析例も紹介する。観測値が離散値として得られ、汎用的な数値解析法が離散化手法であること等を考えると、本手法は工学応用上、意義があるものと考えられる。数値計算に際しては、元阿南高専・専攻科学生 西丸範生氏(現 建設省)の協力を得た。ここに記して感謝します。

参考文献 1) 津田:モンテカルロ法とシミュレーション, 改訂版, 培風館, 1987. 2) Goldberg, D.E.: Genetic Algorithms in Search, Optimization & Machine Learning, Addison - Wesley Publishing Co. Inc., 1989. 3) Matsuho S. et al.: Basic Study...Problem, Proc. of US-Japan Seminar on Structural Optimization, ASCE, pp.109-120, 1997. 4) 山内編:統計数値表, JSA - 1972, 日本規格協会, 1977. 5) Matsuho S. et al.: Basic Study...Integration Procedure and Its Application to First - Passage Problem, Proc. of the IFIP WG7.5, pp.165-172, 1993.

Table 1 Coefficients α_j Calculated by GA

$\alpha_1 = 0.799800715$	$\alpha_{11} = 0.008184105$
$\alpha_2 = 0.624814535$	$\alpha_{12} = 0.166893143$
$\alpha_3 = 0.378233883$	$\alpha_{13} = 0.279635456$
$\alpha_4 = 0.090598506$	$\alpha_{14} = 0.335897875$
$\alpha_5 = 0.591701108$	$\alpha_{15} = 0.895412654$
$\alpha_6 = 0.258276487$	$\alpha_{16} = 0.621023848$
$\alpha_7 = 0.685997228$	$\alpha_{17} = 0.353808208$
$\alpha_8 = 0.487376903$	$\alpha_{18} = 0.691846907$
$\alpha_9 = 0.010174199$	$\alpha_{19} = 0.589746894$
$\alpha_{10} = 0.902656508$	$\alpha_{20} = 0.291281272$

Table 2 Calculation Results of $I_1 \sim I_3$

	I_1	I_2	I_3
Approx.	50338.72	9.53768E-7	1.834E-8
Strict	50337.07	9.53674E-7	1.654E-8
Error %	0.003	0.010	10.896

Table 3 Calculation Results of I_4

ρ	Calculation by α_j of Ref. ⁴⁾	Calculation by Proposed Method	Strict Solution
0.1	0.000248	0.000247	0.0002621
0.3	0.000615	0.000614	0.0007013
0.5	0.001278	0.001278	0.0015598
0.7	0.00239	0.002393	0.0030105
0.9	0.004212	0.004229	0.0053329
0.99	0.004977	0.005013	0.0062094