

金沢大工正員 ○ 関 平和
宍戸 丈暢

1. はじめに

土壤中の物質移動に関する研究は、主に、農学分野において灌漑排水技術の基礎として発展したために、農業生産に関連する土壤水分あるいは塩分の移動に関するものが多かった。しかし近年、産業廃棄物処分場からの汚染物質の漏洩、有機溶剤による地下水汚染、農村集落からの排水による湖沼の富栄養化などの問題と関連して、このような汚染物質の挙動の予測も求められるようになり、そのための数学的モデルも数多く見受けられる。これらには、主として移流分散方程式を基にしたモデル、すなわち決定論的モデルが多い。しかし、決定論的モデルを用いて、現象ができるだけ正確に予測しようとなれば、例えば、流れが集中するような水みちが明瞭に存在する場合には、これらの水みちを前もってモデルに組み込まなければならない、といった不可能に近いとも言える作業を行なわなければならない。また、土壤は物理的性状が不均一であり、その場を移動する物質の挙動は、ある程度のランダム性を有し、移流分散方程式のみで表現することが困難な場合が多いと考えられる。本研究では、昨年度発表した土壤内溶質拡散現象の確率論的モデル化手法を基に、それを移流、反応を考慮したモデルに拡張し、表面から地下水までの不飽和土中の移動現象を対象に数値解析を行った。

2. 理論的取り扱い

現象が起る領域を図1のように $N+2$ 個のセル(0, $N+1$ は境界に相当)に分割すると、反応を伴う移流拡散現象のマスター方程式(確率の収支式)は次のように導かれる。

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dt} = & a(X_0+1)P(X_0+1, X_1-1, t) + b(X_{N+1}+1)P(X_N-1, X_{N+1}+1) \\ & + \sum_{i=1}^N \{(X_{i-1}+1)P(X_{i-1}+1, X_i-1, t) + b(X_{i+1}+1)P(X_{i-1}, X_{i+1}, t) + M(X_i+1)P(X_i+1, t)\} \\ & - (aX_0 + bX_{N+1})P - (a+b+M)\sum_{i=1}^N X_i P \end{aligned} \quad (1)$$

ここで、左辺の P は、時間 t において各セル内の粒子の個数が $(X_0, X_1 \cdots X_{N+1})$ の状態である確率、右辺第1項～3項は、状態 $(X_0, X_1 \cdots X_{N+1})$ への変化率(流入項)、第4、5項は状態 $(X_0, X_1 \cdots X_{N+1})$ からの変化率(流出項)である。式(1)を母関数法などにより直接解くことは困難である。そこで、粒子数 X_i と濃度 C の関係、 $C = X_i \varepsilon$ を用いて、粒子数を濃度に変換した後、式(1)をTaylor展開し、3次以降の微分項を微少であるとして無視すると次のようないFokker-Planck方程式が得られる。

$$\frac{dP}{dt} = -\sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial C_i} \left\{ \left(D \frac{\partial^2 C_i}{\partial z^2} - u \frac{\partial C_i}{\partial z} - MC_i \right) \right\} + \frac{\varepsilon}{2} \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2}{\partial C_i^2} \left\{ \left(D \frac{\partial^2 C_i}{\partial z^2} - u \frac{\partial C_i}{\partial z} + MC_i \right) P \right\} \quad (2)$$

さらに、 P をセルごとの確率 P_n ($n=1 \sim N$)の積の形に変数分離すると、各セルの確率 P_n について次の微分方程式が導かれる。

$$\frac{\partial P_n}{\partial t} + U(t) \frac{\partial P_n}{\partial C_n} - \varepsilon E(t) \frac{\partial^2 P_n}{\partial C_n^2} = 0 \quad (n=1 \sim N) \quad (3)$$

ただし、上式中の係数 $U(t)$ 、 $E(t)$ は、確率論における濃度の期待値が、決定論の解の付近にあり確率もその近傍に集中しているものと考えると、決定論モデルにより次のように近似できる。

$$U(t) \approx - \left(\frac{J_{ml}}{R_d \rho_l \theta_l} - \frac{D}{\theta_l R_d} \right) \frac{\partial C_n}{\partial z} + \frac{D}{R_d} \frac{\partial^2 C_n}{\partial z^2} - \frac{\mu}{R_d} C_n = \frac{\partial C_n}{\partial t} \quad (4)$$

$$E(t) \approx - \frac{1}{2} \left(\left(\frac{J_{ml}}{R_d \rho_l \theta_l} - \frac{D}{\theta_l R_d} \right) \frac{\partial C_n}{\partial z} + \frac{D}{R_d} \frac{\partial^2 C_n}{\partial z^2} + \frac{\mu}{R_d} C_n \right) = \frac{\partial C_n}{\partial t} \quad (5)$$

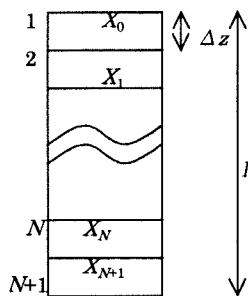


図1 領域のセル分割

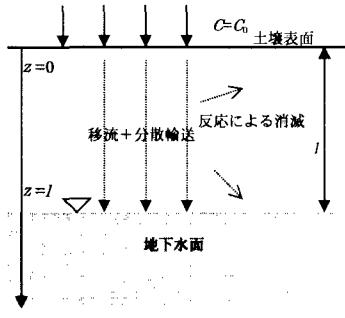


図2 一次元溶質移動現象のモデル図

3. 数値解析結果と考察

式(3)を用いての数値解析例を示す。対象とする溶質は硝酸態窒素とし、図2のような領域において、 $z=0$ の地点で初期濃度 $C_0=2.6\text{mg/l}$ で連続的に投入され、それが地下水方向に浸透していく現象を考える。また土壤層厚は $l=2\text{m}$ 、確率過程の起こる単位濃度幅 $\varepsilon=0.1, 0.05$ とした。

図3は、確率論モデルから得た期待値であり、決定論モデルによる解析結果と併せて示す。両モデルから得られた値はほぼ一致している。また、図4、5は、確率論の期待値、期待値土標準偏差を表わしたものである。土標準偏差内にある確率は $\varepsilon=0.05, 0.1$ ともほぼ同程度で約70%であり、このことから、濃度の確率分布は正規分布に近いものと考えられる。また、 $\varepsilon=0.05$ の時と比べ、 $\varepsilon=0.1$ の時の方が70%の確率でとり得る濃度範囲が広くなっていることがわかる。これは、単位濃度幅 ε が現象のランダム性に関与する因子であることを示している。深さが増すにつれて土標準偏差内の領域は狭くなるが、期待値に対する変動幅は大きくなる。そこで、期待値に対する期待値土標準偏差の比を表わしたもののが図6に示す。このグラフからは、 $\varepsilon=0.05$ の時、土壤表面付近では、70%の確率でとり得る濃度の範囲が、期待値の0.87倍～1.13倍であるのに対し、地下水面近傍では、期待値の0.68倍～1.32倍と、土壤表面付近に比べ広くなっている。また、 $\varepsilon=0.1$ の時も、土壤表面付近では、期待値の0.81～1.19倍であり、地下水面近傍では0.59倍～1.41倍という結果になった。このことは、地下水汚染の問題において、不飽和土壤中を移動する溶質が、どの程度の濃度で地下水面へ達するかを数学モデルで検討する際、適切な ε の値を設定していれば、最大でどの程度、決定論モデルでの予測を上回る濃度となるかという情報を得たい時に、本確率論モデルを用い得ることを意味している。

4. まとめ

本研究で得られた結果を以下に要約する。1)現象のランダム性は、確率過程の起こる単位濃度幅 ε に関係し、 ε の値が大きくなると、現象のランダム性が増す。

2) ε の値は、プロセスの操作条件、現象が起こる場の物理的環境など、理論的に数量化することが困難な要因により変化すると考えられる。従って、対象とする現象に応じて実測、実験的に決定する必要がある。 ε の値を適切に推定することは、現象の予測精度を上げることにつながる。

<文献>

- 1)宍戸・関、1998：土壤内溶質拡散現象の確率論的モデル化、土木学会全国大会講演概要集、VII-20

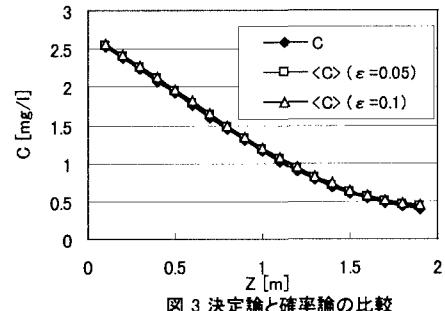


図3 決定論と確率論の比較

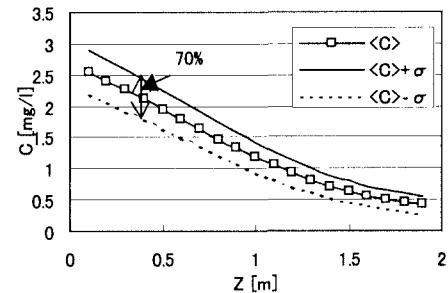
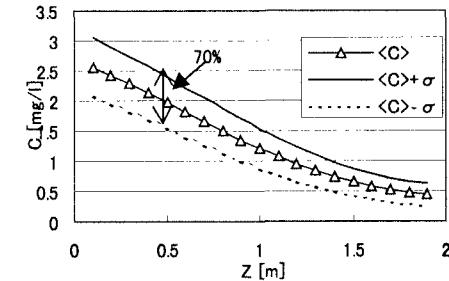
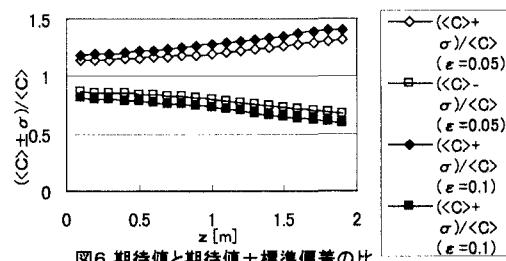
図4 期待値、期待値土標準偏差 ($\varepsilon=0.05$)図5 期待値、期待値土標準偏差 ($\varepsilon=0.1$)

図6 期待値と期待値土標準偏差の比