土木学会第54回年次学術講演会（平成11年9月）

Ⅳ-321　プロビットモデルへの有限要素法の適用

ＩＭＩ計算工学研究室（慶大理工共同研究員）　　正会員　今村　純也

1.はじめに

ロジットモデルに代表される非集計行動モデルは確率密度関数の回帰モデルと言える。残差分散を最小化する既往の回帰モデルに対し、これら一連のモデルは回帰式で説明される個々のデータの確率の同時確率を最大化するよう構築される。

一方、力学を中心とした計算工学の分野では有限要素法が発達してきている。有限要素法は一言で言えば折れ線回帰モデルと言える。その基本的技法は初期の変分原理で説明される定式化から出発し、これを一般化した重みつき残差法として確立されている。

その基本的技法はあくまでも残差分散の最小化（最小２乗法）である。著者はその方法を最小２乗法の準ニュートン法的表現であると解釈している。

例えば、流体力学で最も簡単で、かつ非線形方程式であるHopf方程式は$\frac{\partial u}{\partial t}=-u\frac{\partial u}{\partial x}$で表され（ｔは時間軸、ｘは空間軸、ｕは流速），有限要素法では系を時空要素で構成し、時間軸は境界値問題、時間軸は初期値問題として解く。時間軸を線形式とすれば２未知数のうち１つ（速度）は初期値で決定され、残り１つ（加速度）を求める問題となる。これを時空要素の時間ステップｎ側断面で解く方法（陽解法）とｎ＋１側で解く方法（陰解法）とあり、重みつき残差法のうちガレルキン法を適用すれば、陽解法は完全な最小２乗法であり、陰解法は準ニュートン法的に反復計算することからもこのことは明らかであろう。

自由表面問題のＶＯＦ関数（体積分率，Volume Fraction)はゼロ（気相）から１（液相）の間の値をとり、確率密度関数と言える。著者はこれを指数関数要素（＝exp(f),fはべき乗式とし有限要素で離散化）で表現し、そのHopf方程式にロジットモデルを適用する方法を提案[1]している。

非集計行動モデルには多くのモデルがある[2]が、その代表がロジットモデルであり、線形化手法が確立されていて最も簡素である。その特徴としてＩＩＡ特性を有することが挙げられる。したがって、ＩＩＡ特性を有する現象への適用には最も適しているが、そうでない場合にはネステッドモデルとして構築するなどの工夫が必要となる。

そのほかプロビットモデルを適用する方法がある。しかし、プロビットモデルは取扱が格段に難しくなるなどの難点を有している。

そこで、本稿では有限要素法で系を離散化し、ロジットモデルの簡素さを生かしながら、近似的にプロビットモデルを構築する方法を提案する。提案モデルのポイントは、自然工学系の問題ではデータが条件式の形で無限の点で与えられるのに対し、社会工学系の問題ではデータ収集がボトルネックとなってデータが歯抜け状態となるので、これをどうカバ－するかというところにある。

２．方　法

2.1 系の構成

系の適用範囲をΩとし、Ωを有限要素分割する。力学系では有限要素は１次元では線材、２次元では矩形（線形関数では四辺形）および三角形で構成する。３次元では６面体、４面体などで構成する。

本稿では直線、矩形、６面体に限定する。したがって、N次元への拡張方法は説明不要であろう。

有限要素はｋと記号し、主として１次元または２次元で、かつバイナリ－選択肢で例示する。

Key Words：プロビットモデル、有限要素法、ロジットモデル、ＩＩＡ特性

〒351-0114　和光市本町 31-9-803，TEL.& FAX.048-465-8148, E-mail:jimamura@ra2.so-net.ne.jp

2.2 効用関数と確率密度関数

有限要素ｋ内の効用関数をV_kとしてべき乗式で表現し、確率密度関数をP_kとしてロジットモデルで表現する。よって、ｎ，ｋをサンプルとして系全体の同時確率L^*は(1)式で表現される。

$$L^* \equiv \prod_k \prod_n P_{1n,k}^{\delta_{1n,k}} P_{2n,k}^{\delta_{2n,k}} \tag{1}$$

2.3 有限要素による系の構成

２次元でのC_0連続な線形効用関数モデルを要素図心回りのテーラー展開式で表現し、(2)式とする。

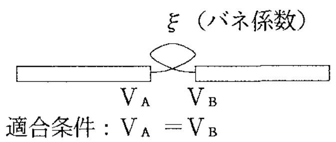
$$V_k \equiv (V_0^{(00)} + V_0^{(10)} \cdot x + V_0^{(01)} \cdot y + V_0^{(11)} \cdot xy)_k \tag{2}$$

著者はC_n連続な有限要素を提案[3]している。よって、(2)式はC_1連続な要素などへ拡張し得る。

要素隅点のノード未知数を$V_i^{(00)}$とし、有限要素法の定式で$V_0^{(**)}$を$V_i^{(00)}$に変換して、これをパラメータとすれば、隣接要素でパラメータが共有（適合条件）される非集計モデルが構築できる。

しかし、データ数が不十分だとマトリックスのランクを引き下げる必要がある。具体的には要素の組み替え作業が必要となる。

そこで、その煩を避けるため要素間境界にバネ要素ξを配置する。これにより安定した解を得ることができることになる。



力学系ではバネはスカラー量であるエネルギーで評価するといろいろな点で便利である。よって、ここでも同様にエネルギー的に把握する。

エネルギーは(3)式のように共役な微分の積の形で表現される。

軸エネルギー ― $V^{(0)}$ ― $V^{(1)}, \xi$

曲げエネルギー ― $V^{(0)}$ ― $V^{(1)}$ ― $V^{(2)}, \xi_1$ ― $V^{(3)}, \xi_2$ (3)

軸エネルギーはC_0連続な要素を代表し、曲げエネルギーはC_1連続な要素の代表と言える。
同様にして，C_n連続な要素のバネも付加できる。

3. バネ剛さの考察

無限大の剛さのバネを付加した系は１要素の系と近似的に等価となる。つまり、通常のロジットモデルとなる。信頼性の高いデータでは系のランクが下がらない程度にバネ剛さを小さくする。つまり、個々のデータを極力再現するよう局所的な追従性を高める。

この２者が両極端に位置するとすれば、通常のデータ信頼性はその中間にあると考えられる。その信頼性の程度に応じてバネ剛さを決定する必要がある。つまり、全体の平均的な性質に従属すべきか、特異性を反映させるべきか、という判断で決定することになる。

4. まとめと今後の課題

有限要素法を適用し、プロビットモデルを近似的に構築する方法を提案した。歯抜けデータをモデル化でカバーするポイントは要素間境界へのバネの付加にある。適正なバネ剛さは今後の検討課題である。

［謝　辞］有限要素法のロジットモデルへの適用アイデアは数年前、東京工業大学屋井教授（当時助教授）に「折れ線回帰モデルです」と説明し、「その説明で分かった」との答えを得て自信を持った。これが契機で考えを継続しバネモデルに行き着いた。ここに記して屋井教授に感謝する。

（参考文献）

1)今村純也「移動境界問題におけるVOF 関数へのﾛｼﾞｯﾄﾓﾃﾞﾙ の適用」第47回応用力学講演会、1997,pp37
2)土木学会土木計画学研究委員会「非集計行動モデルの理論と実際」土木学会，1995
3)今村純也「N回連続的微分可能なＦＥＭﾓﾃﾞﾙ と 連続体へのｺﾝﾄﾛｰﾙﾎﾞﾘｭｰﾑ 法の適用」AIJ 構造工学論文集,1995