

Ⅲ-B 390 双一次のポテンシャル場を用いた FVM による浸透流解析

法政大学 学生会員 石垣智明
 法政大学 正会員 竹内則雄
 法政大学 正会員 武田 洋
 法政大学 正会員 草深守人

1. はじめに

有限体積法（FVM）は、非直交格子を用いた有限差分近似として流体力学や移動現象論などの分野において発展してきた。特に、地盤環境の問題である、地下水による汚染拡散のような水以外との連成問題を解く手法として定評がある。一方、複雑な構造に対して、FEM を用いたボクセル解析が着目を浴びている[1]。本研究では、ボクセル解析の概念を取り入れた FVM による浸透問題の解析法に関する統一的展開を行なうことを目的として、双一次ポテンシャル場を仮定し、FVM に FEM の概念を導入する。また、簡単な数値計算例によって、本手法により得られる解の精度について検討する。

2. 浸透流の支配方程式と有限体積法

定常浸透流の支配方程式は次式で与えられる。

$$L^t v + f = 0, \quad v = -k d, \quad d = L h \quad (1)$$

ここで、 v は流速、 f は湧水量、 k は透水係数、 d は動水勾配、 L は微分作用素である。

図 1 は FVM の制御点と制御体積の関係を示した図である。図に示す網掛け部分は有限体積法のセル中心スキームにおける制御点 r に関する制御体積を示したものである。図中、 $\Omega^{(r)}$ が制御体積で、 $\Gamma^{(r)}$ がその閉境界を示している。また、○印が制御点を、●印が着目制御点と隣接する制御点とを結んだ線分の中点を、×印が着目制御点と隣接制御点で囲まれた領域の図心を表わしている。

式(1)に幾何学的境界条件を満たす図 2 のような $\Omega^{(r)}$ 上で単位となる重み $W^{(r)}$ を乗じて領域 Ω について積分すると、制御体積に関して次の弱形式が得られる。

$$\sum_{r=1}^R \left[W^{(r)} \left(\oint_{\Gamma^{(r)}} n v d\Gamma + \int_{\Omega^{(r)}} f d\Omega \right) \right] = 0 \quad (2)$$

ここで、上付きの r は制御点を表している。

また、閉境界 $\Gamma^{(r)}$ 上の全水頭関数 $\hat{h}^{(r)}$ を定義するにあたり、図 3 の太線で示す 4 つの制御点 r, p, q, s で構成される四角形網 e の領域 $\Omega_e^{(r)}$ を考える。閉境界 $\Gamma^{(r)}$ も同様に四角形網内の着目制御体積の境界 $\Gamma_e^{(r)}$ で構成されるものとする。いま、4 つの制御点で囲まれた四角形網内における境界 $\Gamma_e^{(r)}$ 上の全水頭関数 $\hat{h}_e^{(r)}$ を、それぞれの制御点における節点水頭 $h_e^{(r)}$ により以下のように表わす。

$$\hat{h}_e^{(r)} = N_e^{(r)} \bar{h}_e^{(r)}, \quad \begin{matrix} N_e^{(r)} \\ \bar{h}_e^{(r)} \end{matrix} = \begin{bmatrix} N_r & N_p & N_q & N_s \\ \bar{h}^{(r)} & \bar{h}^{(p)} & \bar{h}^{(q)} & \bar{h}^{(s)} \end{bmatrix}^t \quad (3)$$

ここで、 N_r は有限要素法の場合と同様に以下の関係にある。

$$N_r = a_r + b_r x + c_r y + d_r x y \quad (4)$$

3. 有限要素法を概念を導入した有限体積法

先の FVM の定式化に対して、FEM の概念を導入し、通常の FEM アルゴリズムの範疇で FVM を取り扱うことを考える。

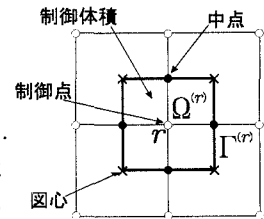


図 1 制御点と制御体積

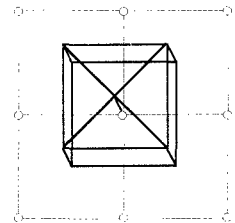


図 2 一定な重み関数

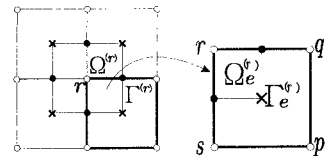


図 3 双一次ポテンシャル場を仮定する四角形網

キーワード：FVM, FEM, 浸透流

〒184-0002 東京都小金井市梶野町 3-7-2

さて、FVM では全領域 Ω を部分領域 $\Omega_m^{(r)}$ の集合で考えていた。一方、領域 Ω を M 個の四角形網、すなわち有限要素の集合と見なすこともできる。部分領域 Ω_m は、図4に示すように4つの制御点 r, p, q, s に関する制御体積の一部 ($\Omega_m^{(r)}, \Omega_m^{(p)}, \Omega_m^{(q)}, \Omega_m^{(s)}$) から構成されており、これらを Ω_m の部分領域と考えると以下の関係が成立する。

$$\Omega = \bigcup_{m=1}^M \Omega_m = \bigcup_{m=1}^M \left(\Omega_m^{(r)} \cup \Omega_m^{(p)} \cup \Omega_m^{(q)} \cup \Omega_m^{(s)} \right) = \bigcup_{m=1}^M \left(\bigcup_{l=1}^4 \Omega_m^{(l)} \right) \quad (5)$$

したがって、FEM の概念を取り入れた弱形式が以下のように得られる。

$$\sum_{m=1}^M \left[\sum_{l=1}^4 W_m^{(l)} \left(\int_{\Gamma_m^{(l)}} n v d\Gamma + \int_{\Omega_m^{(l)}} f d\Omega \right) \right] \quad (6)$$

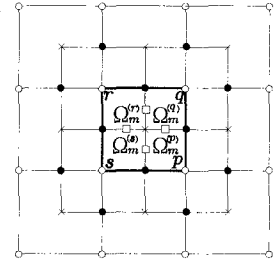


図4 有限要素と制御体積の関係

式(6)より求められる支配方程式は、有限要素法における重ね合わせの手順と同様な手順で解くことができる。なお、解析にあたり PCG 法を用いた。これにより、Element-by-Element に計算を進めることが可能であり、メモリ一や計算効率の向上につながる。

4. 数値解析例

図5および図6に本解析で用いた解析モデルならびに、解析結果を示す。このモデルは、中央に不透水性の矢板があり、その下を右から左に浸透流が通過するようなモデルである。また、左右対称を考慮して、解析領域を左側半分とし、正方形要素を用いた。

図5の解析は $L=30(\text{m})$ 、4500 要素で行なった解析である。解析領域における局所的な誤差を検討するために、矢板下における底部からの距離と流量の関係を FEM と比較して示す。両者は、底部からの距離 $2.5 \sim 3(\text{m})$ の辺りで微小な差が見られるが、ほぼ同様な結果が得られた。

次に、分割数が流量に与える影響を検討した結果を図6に示す。モデルは $L=6(\text{m})$ 、36~3600 要素とし、解析領域全体の流量について FEM および理論解と比較して示す。分割数が増えるほど解析値の変化率が小さくなっており、FVM, FEM とともに理論解より若干小さな値で収束に向かっている。また、この結果は、解析領域全体に対する流量を引かしているため、図5よりも多少の誤差が見られたが、その誤差も理論解と比較して 1%程度であるため、良好な結果が得られていると思われる。

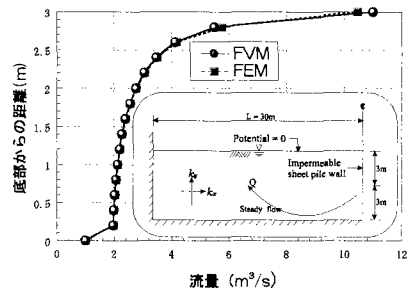


図5 底部からの距離と流量の関係

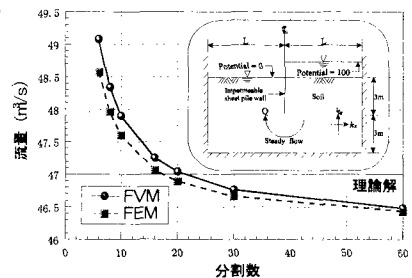


図6 流量と分割数の関係

5. まとめ

本研究では、FVM による浸透問題の解析法に関する統一的展開として、双一次ポテンシャル場を仮定した FVM に FEM の概念を導入し、定式化を行った。この定式化によれば、複雑な地層に対するボクセル情報を基にして、解析を行うことができるものとする。簡単な数値計算を行なった結果、FVM と FEM の間に若干の誤差が見られたが、これは両者の積分点の位置が異なるためであり、理論解と比較しても良好な結果が得られたと考えられる。また、FVM の利点は、辺を基にしたデータ構造を扱うことにより、隣接した要素によって与えられる情報を、コントロールボリュームの境界辺に沿った境界積分を用いて要素行列やベクトルを計算することにあるため、本手法は、汚染拡散などのような水以外との連成問題などの問題に対する効果的な解析法の開発につながるものと思われる。

参考文献

- 1) 鈴木克幸他：多重ボクセル情報を用いたソリッド構造の解析法，計算工学講演会論文集，Vol.2, No.2, pp395-398, 1997
- 2) 竹内則雄他：有限体積法と FEM/RBSM の関係，構造工学論文集，土木学会，Vol.44A, pp349-358, 1998.