

Ⅲ-A277 地下水逆解析を対象にした状態空間における推定値の推移とABIC最小化の効果

清水建設（株）和泉研究室 正会員 ○奥野 哲夫
 同上 技術研究所 正会員 石井 清
 岐阜大学 工学部 正会員 本城 勇介

1.はじめに 地下水逆解析を対象として、著者ら¹⁾はABIC（Akaike's Bayesian Information Criterion）^{2),3),4)}と拡張カルマンフィルタを用いた最適モデルの推定法を検討してきた。この手法は、解析モデルの条件設定の不確定性にも対処する目的から、はじめに複数の代替モデル案を準備し、各モデルに対して拡張カルマンフィルタにより未知パラメータ（透水係数）の空間分布を推定すると同時に、ABIC最小化規準に基づき最適モデルを選択するものである。また、本手法は状態空間モデルとして統一的に理解されるもので、状態変数の予測と推定のアルゴリズムの一部に逆解析（未知パラメータの推定）が効率的に組み込まれている。その詳細は参考文献1)に譲ることとし、本報告ではその基礎的検討に立ち返り、特に状態空間における推定値の推移と、それに対するABIC最小化の効果に着目した検討結果を示す。

2.状態空間モデル（逆解析手法） 変数・記号は参考文献1)に準ずるものとし、状態空間モデルとして観測モデル（観測更新アルゴリズム）とシステムモデル（時間更新アルゴリズム）をそれぞれ以下の式(1), (2)に示す。

$$y_t = G_t x_t + v_t \quad (1) \quad x_{t+1} = f_t(x_t) + \alpha w_t \quad (2)$$

上記のシステムモデルはFEM解析による地下水位と流量の1期先予測により与えられ、対数透水係数は未知パラメータとして状態ベクトル x_t に含まれる（適応フィルタリング）。また、推定誤差共分散行列 $P_{t-1/t-1}$ の時間更新アルゴリズムは以下の式(3)で与えられものとし、 α を超パラメータとする。

$$P_{t/t-1}^* = F_{t-1} P_{t-1/t-1} F_{t-1}^T + \alpha^2 Q_{t-1} \quad (3)$$

以上の状態空間モデルは拡張カルマンフィルタにより効率的に計算され、各時間ステップにおいて以下の評価関数 J を最小にする推定値を与える。以下の検討では式(4)右辺第1項は観測誤差に起因する項として J_1 、右辺第2項は予測誤差に起因する項として J_2 として表示する（ $J = J_1 + J_2$ ）。なお、各ステップでは予測結果(J_2)が事前情報とされる。

$$J(x_t | \alpha) = (y_t - G_t x_t)^T R_t^{-1} (y_t - G_t x_t) + (x_t - \hat{x}_{t/t-1})^T P_{t/t-1}^{-1} (x_t - \hat{x}_{t/t-1}) \quad (4)$$

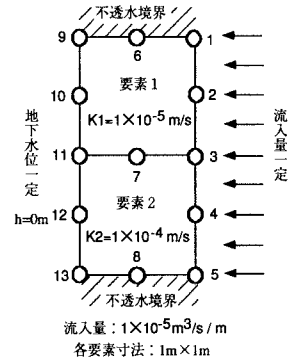


図-1 解析モデル

3.簡易モデルを用いた推定シミュレーション ここでは簡易な仮想地盤モデルを想定して推定の推移を調べる。図-1には設定した仮想地盤モデルを示している。2要素の2次元FEMモデルであり、被圧地下水の定常流を仮定する。図左端は一定水位(0m)に指定して、右端から一定流量を（ $1 \times 10^{-5} \text{ m}^3/\text{s}/\text{m}$ ）流入させる。この状態で地下水流動が定常状態になった段階で、1時間ごとに50時間までの50回の地下水位を観測するものとする。地盤の透水係数は要素1, 2に関して、それぞれ $K1=1 \times 10^{-5} \text{ m/s}$ 、 $K2=1 \times 10^{-4} \text{ m/s}$ とする。したがって、 m/s の単位の真の対数透水係数はそれぞれ $L1=-5$ 、 $L2=-4$ となる。また、地下水位の観測箇所は、節点7(h7)の1カ所の場合と、節点2(h2)と節点7(h7)の2カ所の場合の2ケースを設定し、それぞれCASE-1（観測点1カ所）、CASE-2（観測点2カ所）とする。以上の条件の順解析（定常解析）から地下水位を求め、それらに $3\sigma = 1.0\text{cm}$ （ σ :標準偏差）の観測誤差を付加して模擬観測データを準備した。なお、真の地下水位は $h2=0.624\text{m}$ 、 $h7=0.0909\text{m}$ である。この観測地下水位を用いて、逆に2つの対数透水係数($L1, L2$)の推定を実施した。推定を行うにあたり観測誤差分散 R_t は既知として、各分散を表-1のように設定した。

今回の推定では特にモデル選定は行わないが、推定において最適なシステム誤差 αw_t を評価する目的で、以上の2ケースに対してABICを算定した。その結果を図-2に示す。この結果は50回の観測地下水位を全て用いて推定を行った最終段階でのABICであり、CASE-1では $\alpha=85$ 、CASE-2では $\alpha=20$ においてABICが最小になっている。以下では比較対象として $\alpha=1$ の場合も示し、推定結果はケース名の後に α の値を明記してCASE-1(1)、CASE-1(85)、CASE-2(1)、CASE-2(20)と示す。

表-1 推定に用いた各種分散（共分散は0.0）

分散	状態変数	地下水位 (m ²)	対数透水係数 (m/s)	流量(m ³ /s)
推定誤差分散の初期値 ($P_{0/0}^*$ の対角項)		1.11×10^{-3}	1.11×10^{-1}	1.00×10^{-12}
システム誤差分散の標準値 (Q_t の対角項)		1.11×10^{-7}	1.11×10^{-7}	1.00×10^{-16}
観測誤差分散 (R_t の対角項)		1.11×10^{-5}	1.11×10^{-5}	1.00×10^{-14}

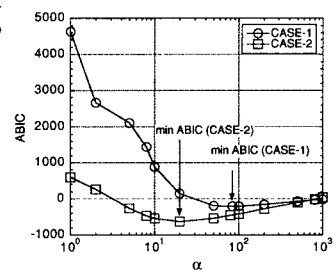
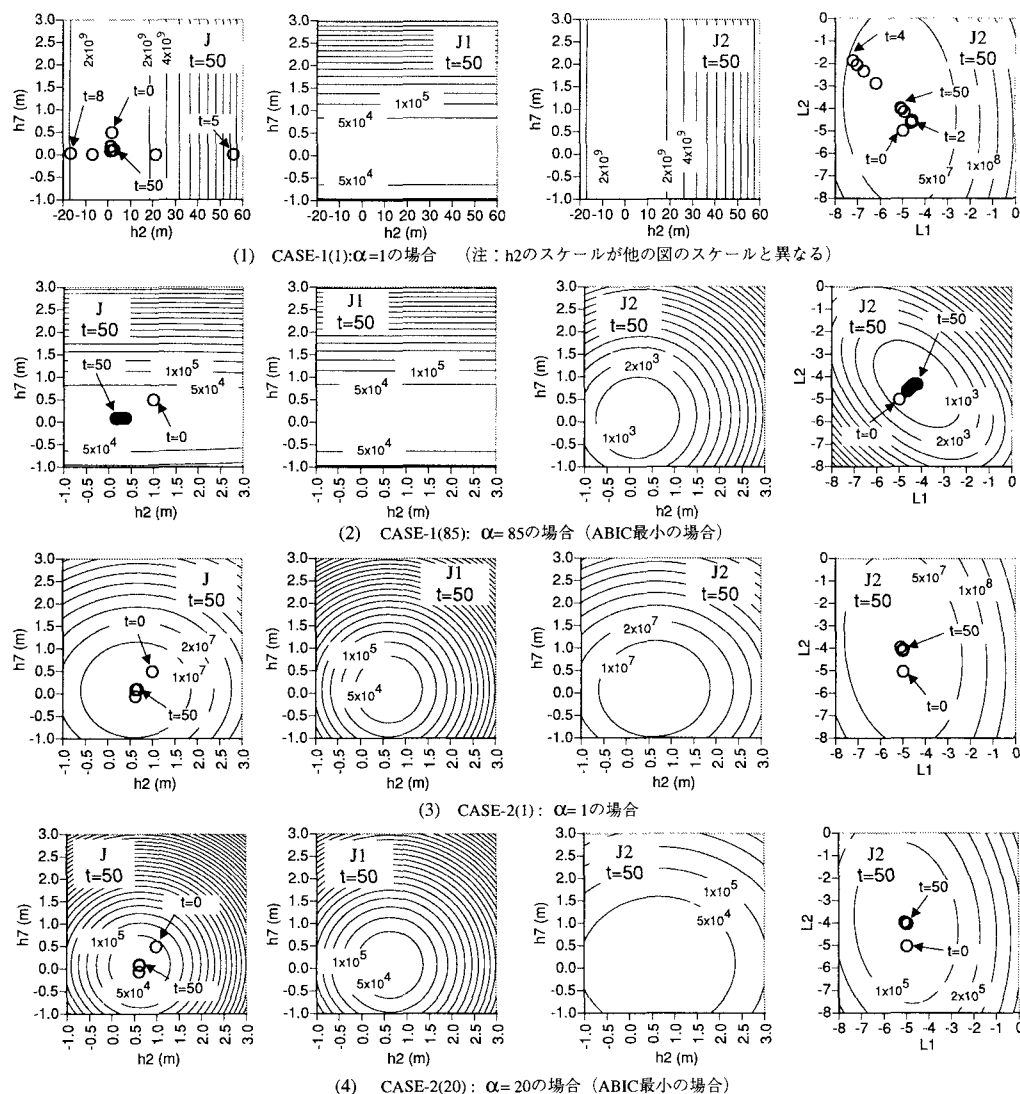


図-2 α とABICの関係

キーワード：逆解析、赤池バイズ情報量規準、状態空間モデル、拡張カルマンフィルタ、透水係数

連絡先（住所：東京都千代田区内幸町2-2-2 富国生命ビル、電話：03-3508-8101、Fax：03-3508-2196）



図一 最終ステップ($t=50$)の評価関数コンターと全ステップ($t=0 \sim 50$)の推定値の推移

4. 結果と考察 全ケースとも初期値($t=0$)として, $L_1=L_2=-5$, $h_2=1.0\text{m}$, $h_7=0.5\text{m}$ から推定を開始した。図一3には最終ステップ($t=50$)の各状態空間での評価関数コンターとそれまでの推定値の推移を示している。各ケースの左端の図は式(4)の評価関数 J のコンターと推定値の推移を h_2 - h_7 空間で示している。 J は J_1 と J_2 の和であることから, それぞれのケースで $t=50$ における J_1 と J_2 のコンターも右隣に示している。特徴的な点は, CASE-1, 2とも $\alpha=1$ の場合にシステム誤差を相対的に小さくしていることから, 予測誤差に係数 $P^*_{i,j-1}$ に大きな重みが与えられ, 評価関数 J の内訳として J_2 が支配的になっている。これに対してABICが最小であるCASE-1(85)とCASE-2(20)では, 観測誤差に係数 J_1 の重みが幾分か大きい J_1 と J_2 が適切にバランス(折衷)されている。各ケースの右端の図は対数透水性係数 L_1 - L_2 空間での J_2 のコンターと推定値の推移である。観測点2点のCASE-2ではほぼ真値に収束しているが, 本来, 非適切な(ill-posed)状況にあるCASE-1(1)では, 不確かな事前情報に基づく予測誤差に過大な重みを与えたため推定値の推移が非常に不安定になっている。一方, CASE-1(85)では観測誤差と予測誤差の重み付けが適切に行われ, L_1 - L_2 空間では事前情報(初期値: $t=0$)から収束点に直線的かつ安定して推移している。このことからABIC最小化は, 逐次推定法においても推定値の安定かつ効率的な更新に寄与していると言える。

参考文献 1) 奥野 哲夫・鈴木 誠・本城 勇介, 土木学会論文集, No.575/III-40, pp.179-198, 1997. 2) Akaike, H., Bayesian Statistic(ed. J. M. Bernardo et. al.), Valencia University Press, pp.143~166, 1980. 3) 本城勇介, 第24回土質工学研究発表会, pp.1647~1650, 1989. 4) Honjo, Y., Liu, W.-T. and Guha, S., International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, Vol.18, pp.709-734, 1994.