

III-A275

LTG法を用いた透水係数の逆解析

(財)電力中央研究所 正会員 ○田中 靖治
同 上 正会員 長谷川琢磨

1. はじめに

本研究では、透水係数の事前情報を使用し、さらに逆解析アルゴリズム中の順解析を高速・高精度に行うために LTG 法を用いる逆解析手法を提案し、ケーススタディにより有効性の確認を行う。

2. 逆解析手法

Galerkin 有限要素法によれば、非定常浸透流の支配方程式は次式で表される。

$$M\dot{h} + Kh = Q \quad (1) \quad \text{初期条件: } h = h_0 \text{ at } t = 0 \quad (2)$$

ただし、 h は節点水理水頭ベクトル、 $\dot{h}$ はその時間微分、 M は貯留マトリクス、 K は透水マトリクス、 Q は流量ベクトルである。事前情報を考慮したベーズ法に基づく評価関数は、最適制御理論によれば Lagrange の未定乗数ベクトル λ を用いて式(3)のように変換される。ただし、 ϕ_i^* は水理水頭の観測ベクトル、 ϕ_i は計算値ベクトル、 C_ϕ は観測誤差の共分散行列であり、観測は時刻 $t=t_1, t_2, \dots, t_{M_i}$ に行われる。また、 k は各有限要素の透水係数から成るベクトル、 k^* はその事前情報ベクトル、 C_k はその誤差共分散行列である。 k^* および C_k として、地盤統計学的手法である kriging による推定値と推定誤差共分散等を用いることが考えられる。

$$J_0 = \int_0^T \left[\lambda^T (M\dot{h} + Kh - Q) + \sum_{i=1}^{N_i} (\phi_i - \phi_i^*)^T C_\phi^{-1} (\phi_i - \phi_i^*) \delta(t - t_i) + \frac{1}{t_f} (k - k^*)^T C_k^{-1} (k - k^*) \right] dt \quad (3)$$

変分法によれば λ は以下の式を解くことにより求まる。ただし、 $\tau = t_f - t_i$ である。

$$M\lambda + K\lambda = - \sum_{i=1}^{N_i} \frac{\partial (\phi_i - \phi_i^*)^T C_\phi^{-1} (\phi_i - \phi_i^*)}{\partial h} \delta(\tau - \tau_i) \quad (4) \quad \text{初期条件: } \lambda = 0 \text{ at } \tau = 0 \quad (5)$$

また、評価関数の勾配は次式により与えられる。

$$\frac{\partial J_0}{\partial k} = \int_0^T \lambda^T \frac{\partial K}{\partial k} h dt + 2 C_k^{-1} (k - k^*) \quad (6)$$

したがって、式(1)、(4)を1回ずつ解くだけで評価関数の勾配が計算可能となる。本研究では、高速かつ高精度に解を得るために Laplace Transform Galerkin 法¹⁾を用いる。両式に Laplace 変換を施すと次式となる。

$$(pM + K)\tilde{h} = Mh_0 + \tilde{Q} \quad (7) \quad (pM + K)\tilde{\lambda} = - \sum_{i=1}^{N_i} \frac{\partial (\phi_i - \phi_i^*)^T C_\phi^{-1} (\phi_i - \phi_i^*)}{\partial h} \exp(-p\tau_i) \quad (8)$$

ここで、 p はラプラス変換変数、 $\tilde{h}$ 、 $\tilde{Q}$ 、 $\tilde{\lambda}$ はベクトル h 、 Q 、 λ の各成分を Laplace 変換して得られるベクトルである。本研究では、式(7)を解いて得られた Laplace 空間における水理水頭 $\tilde{h}_i$ から、数値計算によるラプラス逆変換手法²⁾を用いて節点 i における水理水頭 $h_i(t)$ を計算する。

$$h_i(t) = \frac{1}{T} \exp(p_0 t) \left[\frac{1}{2} \tilde{h}_i(p_0) + \sum_{j=1}^{2L(i)} \left[\operatorname{Re} \{ \tilde{h}_i(p_j) \} \cos \frac{j\pi}{T} - \operatorname{Im} \{ \tilde{h}_i(p_j) \} \sin \frac{j\pi}{T} \right] \right] + E \quad (9)$$

ここで、 $p_0 = \mu - \ln E / 2T$ 、 $p_j = p_0 + (j\pi / T)i$ (i は虚数単位)、 $2T$ はフーリエ級数の周期、 Re 、 Im は $\{ \}$ 内の複素数の実数部と虚数部、 μ は $h_i(t)$ のオーダー ($|h_i(t)| \leq M e^\mu$ 、 M は定数)、 E は許容誤差。Crump²⁾は、 $\mu=0$ 、 $E=10^{-6}$ 、 $T=0.8t_{\max}$ ($t_{\max}$ は計算終了時刻) を推奨している。また、epsilon algorithm の適用により $N=7$ で十分な近似が得られる。 $\lambda_i(t)$ についても同様に、式(8)を解いて得られた $\tilde{\lambda}_i$ から数値計算によるラプラス逆変換手法を用いて計算する。こうして求まった $h_i(t)$ 、 $\lambda_i(t)$ を式(6)に代入して評価関数の勾配を計算する。式(3)の J_0 を最小にする透水係数ベクトル k は繰り返し計算により求める。本研究では、少ない計算量で収束性の高い透水係数の探索方向ベクトルを得られるように、準ニュートン法の一つ Self-Scaling Variable-Metric 法³⁾を用いる。

キーワード：逆解析、LTG法、最適制御理論、準ニュートン法、透水係数、クリッキング

連絡先：〒270-1194 千葉県我孫子市我孫子 1646 TEL:0471-82-1181 FAX:0471-82-5934

3. ケーススタディ計算

提案した解析手法に基づく解析コードを作成し, Carrera and Neuman⁴⁾の例題に適用した。解析対象は一辺 6 km の正方形の水平な帯水層である。図 1 に示すように, 解析領域は $5 \sim 150 \text{ m}^2/\text{day}$ の透水量係数をもつ 9 つの透水ブロックより構成される。また, 領域内には 2 本の揚水井が存在する。流量・境界条件等を図 2 に示す。なお, 図 3 に示すように解析領域内には 18 の観測井が配置されている。解析では, 解析領域を一辺 0.5 km の正方形の有限要素に分割した。

50 (7)	15 (8)	5 (9)
150 (4)	50 (5)	15 (6)
150 (1)	150 (2)	150 (3)

単位: m^2/day

図 1 透水量係数の分布

逆解析を行う前に, 観測水位の模擬データを作成した。水位の観測時刻は揚水開始前と開始後 50, 200, 1000 日とした。そこで, 図 1, 2 の条件下で各時刻の観測点の水位を計算した。貯留係数の値は全領域で 1.0×10^{-3} とした。

これら計算値は, 誤差のない観測データに相当する。さらに, 観測誤差を正規乱数により模擬して, 標準偏差が 1 m と 0.1 m の観測誤差を含む観測データを作成した。同様に, 標準偏差 0.1 の推定誤差を含む対数透水量係数の事前情報の模擬データを作成した。

まず, 誤差のない観測水位を基に, 全ブロックで初期値 $1 \text{ m}^2/\text{day}$ として, 逆解析により透水量係数の推定を行ったところ, 推定誤差の平均値は 0.051% であった。このことから, 本解析手法の精度の良さがうかがわれる。

次に, 標準偏差 0.1 m と 1 m の誤差を含む観測水位を基に逆解析を行ったところ, 推定誤差の平均値はそれぞれ 0.22% と 1.8% であった。このように観測誤差は推定結果の精度に大きな影響を与える。したがって, 精度の高い推定のためには, 正確な水位の測定が重要と考えられる。

一方, 標準偏差 1 m の誤差を含む観測水位を基に, 初期値を 1, 10, 100, 200 m^2/day と変えて推定を行ったところ, いずれの初期値を用いた場合でも解はほぼ同一の値に収束し, 今回の解析に関しては初期値の差が推定結果に及ぼす影響は非常に小さかった。この結果は本解析手法の収束性の良さを示唆している。

さらに, 事前情報と観測水位の両方を用いて推定を行ったところ, 推定値は概ね観測水位のみを用いた場合の推定値と事前情報との中間の値となった。

4. おわりに

ケーススタディ計算により, 提案した手法の有効性が確認されるとともに, 解の基本特性が明らかとなった。今回のモデルは単純であり解が初期値に依存しないため, 事前情報を利用する効果はあまりみられなかった。しかし, 実際の地盤中の透水係数分布は複雑であり, 評価関数は多数の極小値をもつ。そのような場合, 初期値が真値からかけ離れていると, 観測水位のみを用いた解析では解は真値とは異なる極小値に収束するが, 事前情報を用いることにより真値に近い値に収束する可能性が高くなると考えられる。

参考文献

- 1) Sudicky, E.A.: W.R.R., Vol. 25, No. 8, pp. 1833-1846, 1989.
- 2) Crump, K.S.: J. Assoc. Comput. Mach., Vol. 23, No. 1, pp. 89-96, 1976.
- 3) Oren, S.S.: Math. Programming, Vol. 7, pp. 351-367, 1974.
- 4) Carrera, J. and Neuman, S.P.: W.R.R., Vol. 16, No. 2, pp. 331-346, 1980.

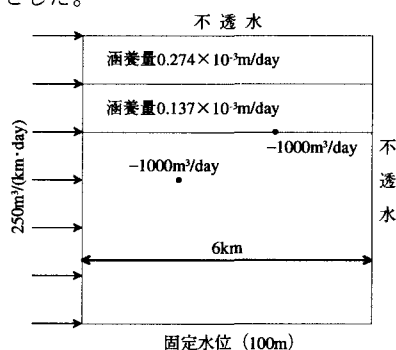


図 2 流量・境界条件

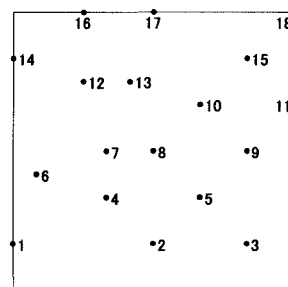


図 3 観測井の配置