

III-A243

弾塑性問題の逆解析手法に関する一考察

法政大学 佐藤 匡史
法政大学 正 草深 守人
奥 村 組 加畑 昌哉

1. まえがき

本文は、地盤材料の降伏関数に含まれる材料定数を制約条件付き非線形最小自乗法を用いて推定する一手法について考察したものである。ここに示す逆解析手法に必要な主要な計算ツールは、非線形弾性問題に対する有限要素プログラム、制約条件付き非線形最小自乗法に基づく最適化プログラム、弾塑性構成方程式の離散化プログラムの三つである。前者の二つはいずれも既存のツールを利用すればよく、最後の弾塑性構成方程式の計算ルーチンのみを選択した降伏関数に基づいて作成すればよい。

2. 逆解析手法

正規圧密状態にある土質材料は、初期載荷から塑性状態にあるものとし、かつ除荷を伴わない負荷過程での応力-ひずみ関係は非線形弾性体で表現できるものと仮定する。さらに、偏差応力テンソル s_{ij} と偏差ひずみテンソル e_{ij} の第二不変量 J_{2D} , I_{2D} を用いて、一般応力状態が単軸状態 (σ, ϵ) と等価になるような係数 λ, χ を導入した次式を定義できるものとする。

$$\sigma = \lambda \sqrt{J_{2D}} = \lambda \bar{\sigma} \quad \epsilon = \chi \sqrt{I_{2D}} = \chi \bar{\epsilon} \quad (1)$$

$$J_{2D} = \frac{1}{2} s_{ij} s_{ji} \quad I_{2D} = \frac{1}{2} e_{ij} e_{ji} \quad s_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \sigma_{mm} \delta_{ij} \quad e_{ij} = \epsilon_{ij} - \frac{1}{3} \epsilon_{mm} \delta_{ij}$$

ここで、 δ_{ij} はクロネッカのデルタ関数である。さらに、非線形弾性体の応力-ひずみ関係は、単軸状態で定義された Duncan-Chang の構成方程式と同様な形式で一般応力状態に対して次式で表現出来るものとする。

$$\bar{\sigma} = \frac{\bar{\epsilon}}{\Lambda + \Theta \bar{\epsilon}} \quad E_{ini} = \frac{1}{\Lambda} \quad (2)$$

ここで、 E_{ini} は初期接線弾性係数、 Λ, Θ は式(1)の係数 λ, χ を含めた材料定数であり、これらは式(2)を構成方程式とする計算変位と観測変位の誤差を下記と同様な方法で最小化することにより同定する。したがって、この時点で解析領域内の応力とひずみは計算値として与えることが出来る。

一方、弾塑性体で除荷を伴うような問題に対しては、式(2)をそのまま利用することは出来ないが、応力履歴が載荷過程のみであるような特別な場合には弾塑性体の応力-ひずみ関係が式(2)で表現できるものと仮定する。この時、解析領域内の応力とひずみは上記に述べたように計算値としてすでに与えられており、この応力-ひずみ履歴を観測値として、与えられた降伏関数に含まれる材料定数を構成方程式の範囲で逆解析により同定することを考える。まず、ひずみ $\bar{\epsilon}$ を次式のように弾性ひずみ $\bar{\epsilon}^e$ と塑性ひずみ $\bar{\epsilon}^p$ の和で表わす。

$$\bar{\epsilon} = \bar{\epsilon}^e + \bar{\epsilon}^p \quad \bar{\epsilon}^e = \bar{\sigma} / E_{ini} = \Lambda \bar{\sigma} \quad (3)$$

上式を式(2)に代入し、 $\bar{\sigma}$ を $\bar{\epsilon}^p$ で微分することにより、塑性ひずみ硬化係数 $H'(\bar{\epsilon}^p)$ が次式で与えられる。

$$H'(\bar{\epsilon}^p) = \frac{d\bar{\sigma}}{d\bar{\epsilon}^p} = \frac{2\Lambda + \Theta \bar{\epsilon}^p}{2\Lambda \sqrt{(\Theta \bar{\epsilon}^p)^2 + 4\Lambda \Theta \bar{\epsilon}^p}} - \frac{1}{2\Lambda} \quad (4)$$

また、増分応力 $\{d\sigma\}$ と増分ひずみ $\{d\epsilon\}$ に対する通常の弾塑性構成方程式を次式で表す。

$$\{d\sigma\} = \mathbf{D}^{ep} \{d\epsilon\} \quad \mathbf{D}^{ep} = \mathbf{D}^{ep}(E_{ini}, \nu, P_i^p, H') \quad (5)$$

ここで、 P_i^p は与えられた降伏関数 f に含まれる m 個の材料定数である。これらの材料定数を、載荷過程に対する式(2)の応力-ひずみ関係を満足する任意の着目有限要素の応力 $\{\sigma\}^{NE}$ とひずみ $\{\epsilon\}^{NE}$ を観測値とみなすことにより、制約条件付き非線形最小自乗法を用いて同定した。すなわち、観測ひずみ $\{\epsilon\}^{NE}$ を入力値として弾塑性構成方程式(5)から計算される応力 $\{\sigma\}^{EP}$ と観測応力 $\{\sigma\}^{NE}$ の誤差を最小化するように全ての材料定数を同定する。

3. 実験値と計算値の比較例

上記に述べた逆解析の具体例として、式(4)の硬化係数を用いた次式のようなひずみ硬化型の Drucker-Plager の降伏関数に従う材料の計算例を示し、若干の考察を加える。

キーワード：逆解析、構成方程式、非線形弾性、弾塑性、非線形最小自乗法

連絡先：〒182-0002 東京都小金井市梶野町 3-7-2 法政大学

$$f = \sqrt{J_{2D}} - \alpha J_1 - \kappa - \int_0^{\bar{\epsilon}^p} H'(\bar{\epsilon}^p) d\bar{\epsilon} = \sqrt{J_{2D}} - \alpha J_1 - \kappa - \frac{\sqrt{(\Theta \bar{\epsilon}^p)^2 + 4\Lambda \Theta \bar{\epsilon}^p} - \Theta \bar{\epsilon}^p}{2\Lambda \Theta} = 0 \quad (6)$$

同定する式(6)の材料定数は α , κ , Λ , Θ の4個であり, ここでは最小化すべき目的関数を以下のように選んだ.

$$ERR = \sum_{i=1}^n E_i^2 \quad E_i = [\sqrt{J_{2D}}]_i^{EP} - [\sqrt{J_{2D}}]_i^{NE} \quad (7)$$

ここで, n は荷重増分の総数, $[\sqrt{J_{2D}}]_i^{EP}$ は着目有限要素の観測ひずみ $\{\epsilon\}^{NE}$ を入力とする構成方程式(5)から計

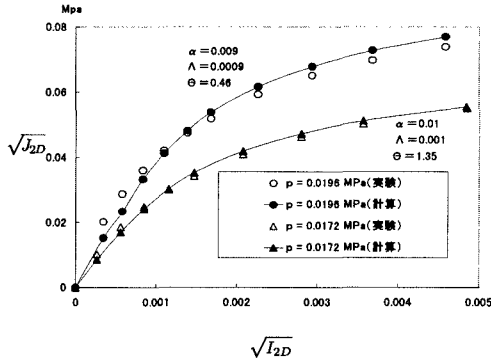


図1 正規圧密粘土のCU試験結果と計算値の比較

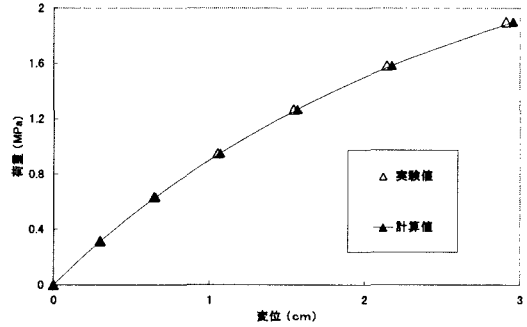


図3 模型載荷試験結果と計算値の比較 (荷重-変位量)

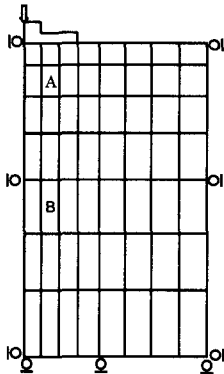


図2 模型載荷試験の有限要素分割

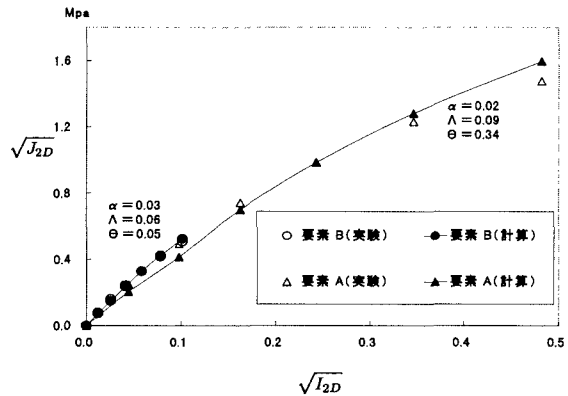


図4 模型載荷試験結果と計算値の比較 (応力-ひずみ)

算される増分応力の和として与えられる i 番目の応力 $\{\sigma\}_i^{EP}$ に関する偏差成分の第二不変量, $[\sqrt{J_{2D}}]_i^{NE}$ は非線形弾性体としての着目有限要素の観測応力 $\{\sigma\}_i^{NE}$ に関する偏差成分の第二不変量である.

(1) 圧密非排水三軸試験結果と計算値の比較: CH 級の正規圧密粘土の圧密非排水三軸試験結果と計算値の比較および同定された材料定数を図-1 に示す. 図から明らかなように, 同定された材料定数による応力-ひずみ関係の計算値は, 試験値とかなり良い一致を示した.

(2) 模型載荷試験結果と計算値の比較: 鋼製円筒モールド内で再圧密した粘土地盤を作成し, 荷重を図-2 のように地表面中央部に設置した剛体載荷板 ($\phi 50$ mm) により載荷し, 載荷板および各地層中央部での変位を沈下計により測定した. 図-3 は載荷板の荷重-変位量関係の実験値を弾塑性体としての計算値と比較したものであり, 図-4 は非線形弾性体としての着目有限要素の応力-ひずみ関係を弾塑性体としての計算値と比較したものである.

4. あとがき

本文で示した逆解析手法により, 弾塑性問題の逆解析の単純化と計算効率を高めることができた. ただし, この方法は解析領域のほぼ全域で応力履歴が負荷過程にあるような問題に制限されるという問題を残している.