

Ⅲ-A62 単一の単純せん断機構に基づく土の応力～ひずみ関係

水産庁 水産工学研究所 正会員 大槇正紀

はじめに 主応力で規定される単一のすべり面(滑動面)上で、土が単純せん断するとして、降伏関数(=塑性ポテンシャル)

を仮定して、土の応力～ひずみ関係を導いた。

空間固定座標系、主応力座標系、すべり面座標系 図1に示す①空間固定

座標系(基底ベクトル e_i , $i=1, 2, 3$)、

②主応力座標系(同 p_i)、③すべり面座標系(同 s_i)の3種類の直交デカルト座標系を考える¹⁾。同じ Cauchy 応力を e_i , p_i , s_i 座標系で T , P , S で表す。また、 e_i 座標系から p_i 座標系及び p_i 座標系から s_i 座標系への座標変換テンソルを N , M で表す。このとき、 T , P , S (引っぱりを正)の間には式(1)の関係がある。ただし、 N の具体的な式は省略するが、 M は式(2)のように表される¹⁾。式(2)中の m_i ($i=1, 2, 3$)は主応力座標系で定義されるすべり面の外向き単位法線ベクトルの成分である。 m_i を一般座標系に変換した成分を n_i で表す(式(3))とき、 N , T , X を式(4)のように表す。また、 e_i , s_i 座標系で定義される同じひずみ速度テンソル D , D_s (引っぱりを正)

Green-Naghdiの応力速度テンソル $\overset{\circ}{T}$, $\overset{\circ}{S}$ (引っぱりを正)の間には式(5)の関係がある¹⁾。

弾性状態での応力～ひずみ関係 等方弾性体の応力速度とひずみ速度の関係は式(6)、(7)のように表される。ここに、 K , G は体積圧縮係数及びせん断弾性係数である。クロネッカーのデルタ δ_{ij} は直交変換により影響を受けないから、式(6)を s_i 座標系に変換すると、式(8)ようになる。

すべり面座標系での土の応力～ひずみ関係

いま、図2に示した s_i 座標系の点 x の速度 v の塑性成分 v_1^p , v_2^p が s_i 方向の座標成分 x_i のみの関数で、 $v_3^p=0$ と仮定する

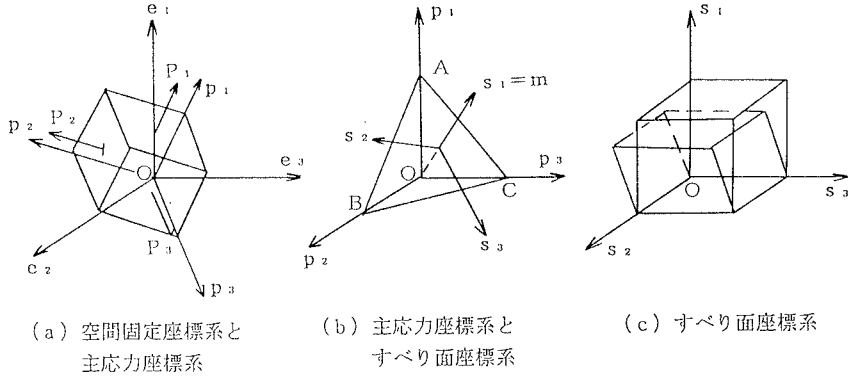


図1 各座標系の関係

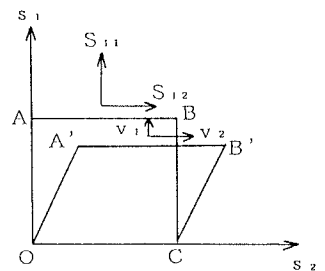


図2 s_i 座標系での単純せん断

$$P = N T N^T, S = M P M^T, S = M N T (M N)^T \quad (1)$$

$$M_{ij} = \delta_{ij} m_j + \delta_{i2} (P_j - N) m_j / T + \delta_{i3} e_{jkl} m_k m_l P_l / T \quad (j: \text{総和をとらない}) \quad (2)$$

$$n_i = m_k N_{ki} \quad (3)$$

$$\left. \begin{aligned} S_{11} &= N = T_{k1} n_k n_1 \\ S_{12} &= S_{21} = T = (T_{ki} T_{kj} n_i n_j - N^2)^{1/2} \\ X &= -S_{12} / S_{11} = -T / N \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

$$D_s = M N D (M N)^T, \overset{\circ}{S} = M N \overset{\circ}{T} (M N)^T \quad (5)$$

$$\overset{\circ}{T}_{ij} = E_{ijkl} \overset{\circ}{D}_{kl} e_j, \overset{\circ}{D}_{ij} = C_{ijkl} \overset{\circ}{T}_{kl} \quad (6)$$

$$\left. \begin{aligned} E_{ijkl} &= (K - 2G/3) \delta_{ij} \delta_{kl} + G(\delta_{il} \delta_{jk} + \delta_{ik} \delta_{jl}) \\ C_{ijkl} &= (1/2G) \{ (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) / 2 - (3K - 2G) \delta_{ij} \delta_{kl} / (9K) \} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

キーワード：土の応力～ひずみ関係、単純せん断、弾塑性理論、すべり面

連絡先：茨城県鹿島郡波崎町海老台 Tel 0479-44-5940 Fax 0479-44-1875

と、塑性ひずみ速度は式(9)のように表される。降伏関数を式(10)のように表す(M : 強度パラメーター)。

f の S_{ij} に関する偏微分係数 G_{Sij} は、式(11)で表される。塑性ひずみ速度 D_{Sij}^p を式(12)で表す。また、

式(10)中の S_{11x} は硬化パラメーターであるが、式(13)のように塑性体積ひずみ速度で表されると仮定する(λ, κ : 圧縮、膨張指数、 e : 間隙比)。Pragerの適合条件式は式(14)のようになる。式(13)、(14)より、

塑性係数 Λ は式(15)で表される。 $\Lambda > 0$ を塑性ひずみ速度の発生条件とする。これより、塑性ひずみ速度は式(16)、(17)のように表される。全

ひずみ速度 D_{Sij} が弾性成分 D_{Sij}^e と塑性成分 D_{Sij}^p の和として式(18)で表されると、式(19)が成立する。これを式(14)に代入して、式(13)を

考慮すると、式(20)を得る。ただし、式中の F_{Sij} 、 Λ_i は式(21)、(22)で表される。このとき、応力速度 $\dot{S}_{ij}$ は式(23)、(24)で表される。

空間固定座標系での土の応力～ひずみ関係 s_i 座標系で得られた土の応力～ひずみ関係式(16)、(23)を構成している $\dot{S}_{ij}$ 、 D_{Sij} 、 C_{Sijkl} などは式(5)よりテンソルとしての座標変換に従うから、これを e_i 座標系に変換すると、式(25)、(26)のようになる。ただし、式中の G_{ij} 、 F_{ij} は G_{Sij} 、 F_{Sij} を変換したもので、式(27)のように表される。このとき、 C_{ijkl} 、 E_{ijkl} の間には式(28)の逆関係がある。

むすび 主応力で規定される単一のすべり面上で土が単純せん断する

として、すべり面座標系で弾塑性の応力～ひずみ関係式を導びき、これを空間固定の一般座標系に座標変換することにより、一般的な土の応力～ひずみ関係を導いた。具体的な応力～ひずみ関係については、すべり面の外向き単位ベクトル m の方向を与えることにより種々の応力～ひずみ関係が得られる。

参考文献 1) 大横正紀(1999): 応力速度の座標変換に関する考察、第34回地盤工学研究発表会講演集(投稿中)

$$\dot{S}_{ij} = E_{ijkl}^e D_{Skl}^e, D_{Sij}^e = C_{ijkl}^e \dot{S}_{kl} \quad (8)$$

$$\left. \begin{aligned} D_{S11}^p &= \partial v_1^p / \partial x_1 \\ D_{S12}^p &= D_{S21}^p = (1/2) \partial v_2^p / \partial x_1 \\ \text{その他の } D_{Sij}^p &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

$$f = -S_{12} / (MS_{11}) + \ln(S_{11} / S_{11x}) = 0 \quad (10)$$

$$G_{Sij} = \partial f / \partial S_{ij} = \{(M + S_{12} / S_{11}) \delta_{ij} \delta_{j1} - (\delta_{i1} \delta_{j2} + \delta_{i2} \delta_{j1})\} / (MS_{11}) \quad (11)$$

$$D_{Sij}^p = \Lambda G_{Sij} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \dot{e}^p / (1 + e) &= \text{tr } D_S^p = D_{S11}^p \\ &= -\{(\lambda - \kappa) / (1 + e)\} \dot{S}_{11x} / S_{11x} = \Lambda G_{S11} \end{aligned} \quad (13)$$

$$\dot{f} = G_{Skl} \dot{S}_{kl} - \dot{S}_{11x} / S_{11x} = 0 \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \Lambda &= -\{(\lambda - \kappa) / (1 + e)\} MNG_{Skl} \dot{S}_{kl} / (M - X) \\ &= -\{(\lambda - \kappa) / (1 + e)\} MNG_{kl} \dot{T}_{kl} / (M - X) \end{aligned} \quad (15)$$

$$D_{Sij}^p = C_{Sijkl}^p \dot{S}_{kl}^p \quad (16)$$

$$C_{Sijkl}^p = -\{(\lambda - \kappa) / (1 + e)\} MNG_{Sij} G_{Skl} / (M - X) \quad (17)$$

$$D_{Sij} = D_{Sij}^e + D_{Sij}^p = (C_{ijkl}^e + C_{ijkl}^p) \dot{S}_{kl} \quad (18)$$

$$\dot{S}_{ij} = E_{ijkl}^e (D_{Skl} - \Lambda G_{Skl}) \quad (19)$$

$$\Lambda = F_{Skl} D_{Skl} / \Lambda_i \quad (20)$$

$$\begin{aligned} F_{Sij} &= G_{Skl} E_{kl ij}^e = E_{ijkl}^e G_{Skl} \\ &= (K - 2G/3) (M + S_{12} / S_{11}) \delta_{ij} \\ &\quad / (MS_{11}) + 2GG_{Sij} \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \Lambda_i &= [\{(K + 4G/3) (M - X)^2 + 4G\} / (MN) \\ &\quad - \{(1 + e) / (\lambda - \kappa)\} (M - X)] / (MN) \end{aligned} \quad (22)$$

$$\dot{S}_{ij} = E_{Sijkl} D_{Skl} = (E_{ijkl}^e - E_{ijkl}^p) D_{Skl} \quad (23)$$

$$E_{Sijkl}^p = F_{Sij} F_{Skl} / \Lambda_i \quad (24)$$

$$\left. \begin{aligned} D_{ij} &= C_{ijkl} \dot{T}_{kl} = (C_{ijkl}^e + C_{ijkl}^p) \dot{T}_{kl} \\ \dot{T}_{ij} &= E_{ijkl} D_{kl} = (E_{ijkl}^e - E_{ijkl}^p) D_{kl} \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

$$\left. \begin{aligned} C_{ijkl}^p &= -\{(\lambda - \kappa) / (1 + e)\} (MN) \\ &\quad \cdot G_{ij} G_{kl} / (M - X) \\ E_{ijkl}^p &= F_{ij} F_{kl} / \Lambda_i \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

$$\left. \begin{aligned} G_{ij} &= \{(M - X - 2/X) \delta_{ik} \delta_{jl} + (T_{ik} \delta_{jl} \\ &\quad + \delta_{ik} T_{jl}) / (NX)\} n_k n_l / (MN) \\ F_{ij} &= (K - 2G/3) (M - X) \delta_{ij} / (MN) \\ &\quad + 2GG_{ij} \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

$$C_{ijkl} E_{kl mn} = (\delta_{im} \delta_{jn} + \delta_{in} \delta_{jm}) / 2 \quad (28)$$