

Ⅲ-A32

限界状態弾塑性モデルの3次元化

名古屋工業大学 正 会 員 ○孫 徳安・松岡 元・姚 仰平
新日本製鐵（株）正 会 員 一村政弘

Cam-clay モデルのような限界状態弾塑性モデルの3次元化の方法として $g(\theta)$ 法¹⁾があげられるが、この方法を SMP 規準に適用すると不都合が生じる。SMP 規準に基づいた変換応力を用いれば、この不都合が解消され、合理的に3次元化できることを示す。

1. SMP 規準に基づく $g(\theta)$ 法による限界状態弾塑性モデルの3次元化

土の弾塑性モデルにSMP規準を取り入れるための方法として、次のようなものが考えられる。まず、SMP規準の π 面上の形状関数 $g(\theta, \phi_{mo})$ は、図-1に示す π 面上のSMP曲線上の点A'から原点Oまでの長さ ℓ_θ と ℓ_0 の比として次式で表される²⁾。

$$g(\theta, \phi_{mo}) = \frac{\ell_\theta}{\ell_0} = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{8 + \sin^2 \phi_0} - \sin \phi_0)}{4\sqrt{2 + \sin^2 \phi_0} \cos \psi} \quad (1)$$

ここに、 ϕ_{mo} は三軸圧縮応力状態での内部摩擦動員角であり、 ϕ_0, ψ は次式で表される。

$$\phi_0 = \tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{2}}{3} \left(\sqrt{\frac{\sigma_1}{\sigma_3}} - \sqrt{\frac{\sigma_3}{\sigma_1}} \right) \right) = \tan^{-1} \left(\frac{2\sqrt{2}}{3} \tan \phi_{mo} \right) \quad (2)$$

$$\psi = \frac{1}{3} \cos^{-1} \left\{ - \left(\frac{3}{2 + \sin \phi_0} \right)^{\frac{3}{2}} \sin \phi_0 \cos 3\theta \right\} \quad \left(0 \leq \psi \leq \frac{\pi}{3} \right) \quad (3)$$

また、Cam-clay モデルなど三軸圧縮応力下で提案・検証された降伏関数は応力パラメータ p, q を用いて次式で表される。

$$f(p, q, H) = 0 \quad (4)$$

ここに、 H は硬化パラメータである。このような構成式には、せん断降伏と強度の規準として Extended Mises 規準を採用している（図-2(a)参照）。これは明らかに地盤材料の変形・強度特性にふさわしくないのので $g(\theta)$ 法を採用して修正することがよく行われている³⁾。この $g(\theta)$ は本論文の記号で表せば、 $g(\theta, \phi)$ になる（ ϕ ：内部摩擦角）。すなわち、降伏関数（式(4)）は次式のように一般化される。

$$f(p, q/g(\theta, \phi), H) = 0 \quad (5)$$

式(5)には π 面上のせん断降伏時の形状関数 $g(\theta, \phi_{mo})$ と破壊時の形状関数 $g(\theta, \phi)$ が同じであるという仮定が含まれている（図-2(b),(c)参照）。一方、式(1)の形状関数 $g(\theta, \phi_{mo})$ は、せん断するにつれて円形→オムズビ形→正三角形に変化する（図-2(c)参照）。これは土の応力誘導異方性の変形特性を表現していると考えられる。しかし破壊時の形状関数 $g(\theta, \phi)$ を用いると土の応力誘導異方性を考慮しておらず、降伏関数は地盤材料の変形特性を忠実に反映していないと考えられる。そこで式(5)を次式

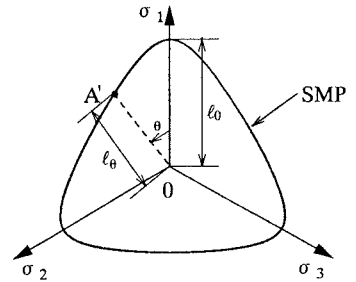
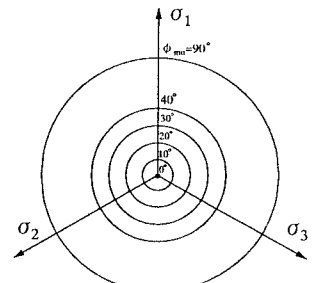
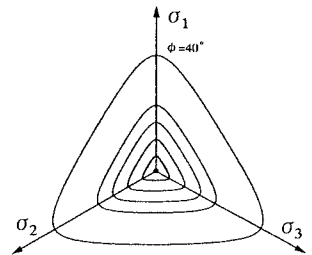


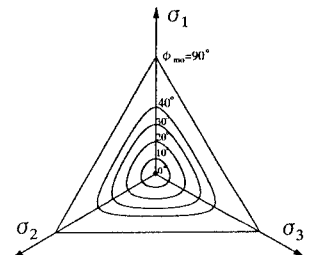
図-1 SMP 規準の動径



(a) $g(\theta) = 1$



(b) $g(\theta, \phi)$



(c) $g(\theta, \phi_{mo})$

図-2 π 面上の形状関数

Key Words : $g(\theta)$ 法、弾塑性モデル、3次元化、破壊規準、変換応力

〒466-8555 名古屋市昭和区御器所町 TEL & FAX 052-735-5483

に改める。

$$f(p, q/g(\theta, \phi_{mo}), H) = 0 \quad (6)$$

この降伏関数は地盤材料の π 面上の変形特性を忠実に考慮していると思われる。しかし、この降伏面の3次元化の方法を塑性体積ひずみを硬化パラメータとし関連流れ則を採用している Cam-clay モデルへ適用すると、次のような不都合が生じる。例えば、Original Cam-clay モデルの降伏関数は式(6)に基づいて次式になる。

$$f = \frac{\lambda - \kappa}{1 + e_0} \left\{ \ln \frac{p}{p_0} + \frac{q}{Mg(\theta, \phi_{mo})p} \right\} - \varepsilon_v^p = 0 \quad (7)$$

これは、SMP 規準に基づいて修正された Cam-clay モデルの降伏関数を表している。すなわち、この降伏面の形は π 面上では SMP 曲線 (図-2(c)) を呈しながら三軸圧縮条件では Cam-clay モデルの降伏線と同じになっている。図-3は、三軸圧縮・三軸伸張応力条件において式(7)を $p \sim (\sigma_a - \sigma_r)$ の関係で表したものである。同図より同じ p において、三軸伸張側の $q (= \sigma_a - \sigma_r)$ は三軸圧縮側の q より小さくなる。三軸伸張側の q の値が最大である点 (E) は限界状態線の右側にある。応力空間で関連流れ則を採用すれば、BE の範囲では塑性ひずみ増分ベクトルの方向が下左向きとなり、Cam-clay モデルのような塑性体積ひずみを硬化パラメータとする弾塑性モデルでは不都合が生じる。つまり、ポテンシャル関数の形状関数としては $g(\theta, \phi_{mo})$ を用いることができない。

2. 変換応力による限界状態弾塑性モデルの3次元化

SMP 規準に基づいた変換応力を導入して、より合理的な3次元化の方法を提案している³⁾。まず、SMP 規準に基づいた変換応力を式(8)で表す (図-4)。

$$\tilde{\sigma}_{ij} = \tilde{p} \delta_{ij} + \tilde{s}_{ij} = p \delta_{ij} + \frac{\ell_0}{\ell_\theta} s_{ij} = p \delta_{ij} + \frac{s_{ij}}{g(\theta, \phi_{mo})} \quad (8)$$

ここに、 $\tilde{p} = \tilde{\sigma}_{ij} \delta_{ij} / 3$ 、 $\tilde{s}_{ij} = \tilde{\sigma}_{ij} - \tilde{p} \delta_{ij}$ である。式(8)で表した変換応力を式(7)に導入すれば、降伏関数は次式となる。

$$f = \frac{\lambda - \kappa}{1 + e_0} \left\{ \ln \frac{\tilde{p}}{p_0} + \frac{\tilde{q}}{M\tilde{p}} \right\} - \varepsilon_v^p = 0 \quad (9)$$

この降伏曲面は通常の応力空間では、図-2(c)で示したように π 面上で円形→オムスピ形→正三角形にに変化するので、土の応力誘導異方性を考慮しているものであり、変換応力空間では図-5に示すように通常の応力空間で表す Original Cam-clay モデルの降伏曲面の形と全く同じとなる。すなわち、変換応力空間で関連流れ則を採用することによって上述したような BE の範囲がなくなり、合理的に3次元化できる。また、3次元応力下での限界状態は次のように表現できる。

$$\left. \begin{aligned} \tilde{q}_{cs} / \tilde{p}_{cs} &= M \\ \varepsilon_v^p &= \frac{\lambda - \kappa}{1 + e_0} \left(\ln \frac{\tilde{p}_{cs}}{p_0} + 1 \right) \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

参考文献 1) Zienkiewicz, O. C. and Pande, G. N.: Some useful forms of isotropic yield surface for soil and rock mechanics, Finite Elements in Geomechanics edited by Gudehus, G., John WILEY & SONS, pp.179-190, 1977. 2) 佐武正雄 (1998) ; 私信. 3) Matsuoka, H., Yao, Y.P. & Sun, D.A.(1999), Soils and Foundations, Vol.39, No.1, pp.81-95

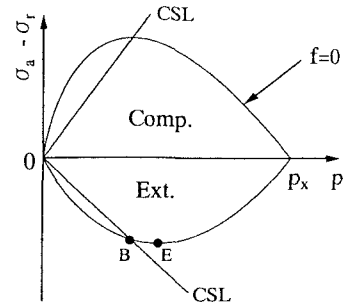


図-3 降伏線 (式(7))

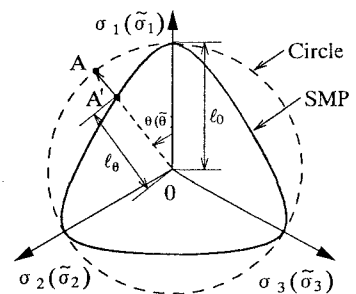
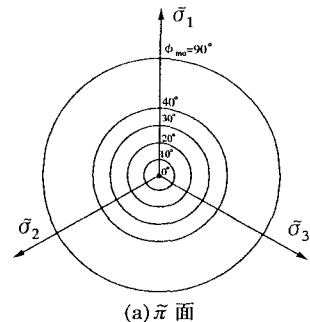
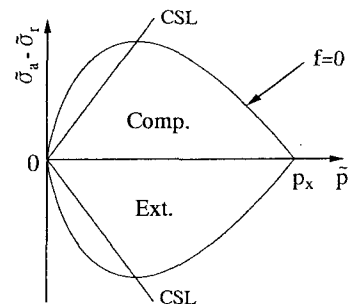


図-4 変換応力



(a) π 面



(b) $\tilde{p} - \tilde{q}$ 平面

図-5 降伏曲面 (式(9))