II-313　両側有界極値分布の母集団統計量と確率水文量推定精度

京都大学大学院　学生員　土佐　香織　　京都大学防災研究所　正員　宝　馨
ケミカルグラウト　荒木　一弘

1　はじめに　これまで筆者らは，上下限値を有する確率分布の水文頻度解析への導入を試みてきた[1]．本研究では，モンテカルロ実験を行うことにより，両側有界極値分布を用いた場合の T 年確率水文量の推定精度がどの程度になるのかを定量的に把握し，その特性を評価する．

2　規準化によるEVLUB分布の特性評価　両側有界極値分布，EVLUB (Extreme Value with Lower and Upper Bounds) 分布は，神田 (1981) によって，地震動や風速の最大荷重強度を表すための確率分布として提案された．それは次式のように表される[2]．

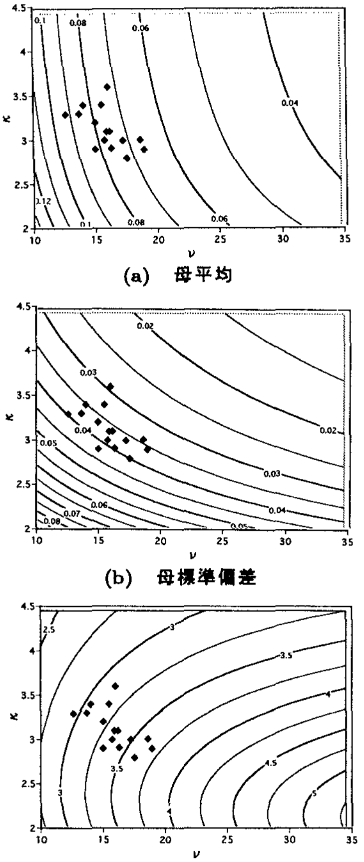
$$F(x) = \exp\left[-\left\{\frac{g-x}{\nu(x-a)}\right\}^{\kappa}\right] \tag{1}$$

$F(x)$ は分布関数，a，g はそれぞれ変量の下限値および上限値，ν は尺度母数，κ は形状母数である．

モンテカルロ実験を行う際の母集団想定の下準備として，このEVLUB分布に対して規準化を行う．すなわち，X を変量，Y を規準化変量として，

$$Y = \frac{X-a}{g-a} \tag{2}$$

の変換を行う．規準化を行うと，Y の上限値は1，下限値は0となる．この規準化領域において，ν，κ と，3つの基本統計量，母平均 (μ^*)・母標準偏差 (S^*)・母ひずみ (C_s^*) の関係を数値解析的に求めた結果を図1に示す．それと同じ平面上に，15種類の実際の極値雨量データから推定された母数 ν，κ の値もプロットした．このとき，上限値としては日本の豪雨記録に基づくPMP (Probable Maximum Precipitation，可能最大1日降水量 1311 mm，同2日降水量 1813 mm，同3日降水量 2192 mm)[3] を用い，下限値は0とした．また，他の2母数 ν，κ は最尤法で推定した．この図から，極値雨量データより推定される母集団は μ^* が0.06から0.10，S^* が0.025から0.045，C_s^* が2.75から3.75の範囲内にあることが分かる．ただし，ひずみには標本サイズ N に依存する上・下限が存在することが理論的に導出されており[4]，そのためこれらの母集団に対する統計量は，たかだか100個程度の大きさの標本から得られる標本統計量とは一致しない．



(a)　母平均
(b)　母標準偏差
(c)　母ひずみ

図1　母集団統計量と母数推定値

ここに，実領域での基本統計量，平均 μ，標準偏差 S，ひずみ C_s と規準化領域でのそれにあたる μ^*，S^*，C_s^* との間には，$\mu = (g-a)\mu^* + a$，$S = (g-a)\cdot S^*$，$C_s = C_s^*$ の関係がある．

3　モンテカルロ実験による確率水文量推定精度の評価　想定する母集団と標本サイズ N を変化させてモンテカルロ実験を行うことにより，分布モデルの特性を評価する．本研究では，EVLUB分布・対数

キーワード：モンテカルロ実験，水文頻度解析，上下限値，極値，標本サイズ
京都大学防災研究所（〒611-0011 宇治市五ヶ庄，TEL 0774-38-4125，FAX 0774-38-4130）

表1　100年確率水文量の推定値の相対誤差 REQ の比較 (繰り返し回数 M=5000)

標本サイズ N	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	200	500	1000
Case1	0.263	0.187	0.151	0.130	0.117	0.107	0.098	0.092	0.087	0.080	0.058	0.036	0.026
Case2	0.286	0.203	0.163	0.140	0.126	0.115	0.106	0.099	0.094	0.087	0.062	0.039	0.028
Case3	0.308	0.218	0.175	0.151	0.135	0.124	0.114	0.107	0.101	0.093	0.067	0.042	0.030
Case4	0.327	0.231	0.185	0.160	0.143	0.131	0.121	0.113	0.107	0.099	0.071	0.045	0.032
Case5	0.346	0.244	0.196	0.169	0.153	0.138	0.127	0.119	0.113	0.104	0.075	0.047	0.033
対数正規分布	***	0.455	0.233	0.184	0.160	0.142	0.132	0.121	0.114	0.107	0.073	0.045	***
Gumbel 分布	0.173	0.122	0.098	0.084	0.075	0.069	0.063	0.059	0.056	0.052	0.037	0.023	0.017

正規分布・Gumbel 分布について，以下の手順で比較評価する．

Step1) 母集団を想定する．すなわち，母集団の確率分布と母数を仮定する．

Step2) 母集団から大きさ N の標本を抽出する．すなわち，仮定した分布に従う乱数を N 個発生させる．

Step3) 発生させた標本に対して，最尤法により母数を推定し，確率水文量を推定する．

Step4) Step2) と **Step3)** を M 回繰り返し，確率水文量の推定値の相対誤差 (REQ) を算定する．

C_v は，T 年確率水文量の平方根平均平方誤差 (RMSE, root mean square error) を真値で除した値であり，小さいほど良い推定である言える．ある統計量 θ の推定量 $\hat{\theta}$ に関する MSE は次式で与えられる．

$$\begin{aligned} \mathrm{MSE} &= \mathrm{E}\left[\left(\hat{\theta}-\theta\right)^2\right] \\ &= \mathrm{E}\left[\left(\hat{\theta}-\mathrm{E}\left[\hat{\theta}\right]\right)^2\right]+\left(\mathrm{E}\left[\hat{\theta}\right]-\theta\right)^2 \\ &= \mathrm{Var}\left[\hat{\theta}\right]+\left\{\mathrm{Bias}\left[\hat{\theta}\right]\right\}^2 \end{aligned} \quad (3)$$

ここに，E[•] は期待値操作を，Var[•]，Bias[•] は，それぞれ分散，偏りを示す．すなわち，MSE は，推定量 $\hat{\theta}$ のばらつき具合 Var と偏りの大きさ Bias の二乗の和で表されるものである．この MSE の平方根をとったものが RMSE である．ここでは，標本サイズ N=10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100, 200, 500, 1000 とする．また試算の結果，繰り返し回数 M=5000 とする．

ここで，EVLUB 分布を母集団の確率分布とし，2 の結果より母ひずみが 2.75, 3.00, 3.25, 3.50, 3.75 となるような母数を仮定した場合を，それぞれ Case1, Case2, Case3, Case4, Case5 とする．Case1 ～ Case5 と，対数正規分布・Gumbel 分布を用いた場合の REQ の値を **表1** に示す．この表から以下のことが言える．

- EVLUB 分布は大きい標本 ($N \geq$ 約 500) では，対数正規分布より推定精度が劣ることがある (Case5) が，小さい標本 ($N \leq 100$) では，全てのケースで対数正規分布より優れている．
- Gumbel 分布が極めて良い推定値を与えている．また，Case 1 から Case 5 に移るに従って，推定精度が落ちている．この原因として母ひずみの影響が考えられる．なぜなら，母ひずみが大きくなると，相対的に分布の右裾部分が長くなり，確率水文量が変動しやすくなるために，推定精度が落ちてしまうからである．Gumbel 分布の母ひずみは一定値約1.13であり，Case 1 から Case 5 に比べてかなり小さい値である．よって，推定値のばらつきが相対的に小さくなるので，推定精度が良くなる (REQ が小さく評価される) と考えられる．Case 1 から Case 5 にかけて EVLUB 分布の母ひずみは，2.75, 3.00, 3.25, 3.50, 3.75 と大きくなるので，推定精度は落ちていく．

4　結語　本研究で得られた成果は以下の通りである．

- 規準化を行うことにより，EVLUB 分布の2つの母数 ν, κ と，基本統計量との関係を数値解析的に示した．
- 上側無限大の対数正規分布に比べ，両側有界の EVLUB 分布の小標本 ($N \leq 30$) に対する T 年確率水文量の推定精度がはるかに良くなることが明らかになった．
- 母ひずみが小さいほど，T 年確率水文量の推定精度が良くなることを実証した．

参考文献

1) 宝　馨・土佐香織 (1999)：両側有界分布の水文頻度解析への応用，水工学論文集，第 43 巻，pp. 121-126.
2) Jun Kanda (1981)：A New Extreme Value Distribution With Lower and Upper Limits for Earthquake Motions and Wind Speeds, *Theoretical and Applied Mechanics*, Vol. 31, University of Tokyo Press, pp. 351-354.
3) 水文・水資源学会編集 (1997)：水文・水資源ハンドブック，朝倉書店，pp. 231-234.
4) Kirby, W.(1974):Algebraic Boundedness of Sample Statistics, *Water Resources Research*, Vol. 10, No. 2, pp. 220-222.