II-196　拡散シミュレーションにおける移流項差分スキームと格子スケールの影響

中部大学大学院　学生員　大坪郁宜・酒井孝典
古川電機製作　倉谷尚伸
中部大学　正会員　武田　誠・松尾直規

1．はじめに

拡散現象を対象とした数値解析では、移流項差分スキームの取り扱いが従来から問題となっている。また、数値解析は空間的に格子を配置し、その格子の平均値をもって計算するので、格子スケールが結果に及ぼす影響も無視できないと考えられる。本研究では、移流項差分スキームと格子スケールの関係について検討を行い、その定性的な特性を明らかにする。

2．数値解析手法

本研究に用いる物質輸送の基礎方程式は以下に示す移流方程式と拡散方程式である。

$$\frac{\partial C}{\partial t}+\frac{\partial uC}{\partial x}=0 \quad \cdots(1) \qquad \frac{\partial C}{\partial t}+\frac{\partial uC}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(D\frac{\partial C}{\partial x}\right) \quad \cdots(2)$$

ここで、x：平面の空間座標、t：時間、C：濃度、u：x方向の流速、D：拡散係数である。

基礎方程式の離散化には差分法を用いる。本研究では、解析精度上問題となる移流項に着目し、その差分化の影響を比較するために、表1にある3通りの差分スキームを選択した。なお、拡散項には中央差分を用いている。

表1　移流項差分スキームの設定

Scheme 設定	空間方向差分法	時間方向差分法
Scheme 1	DONOR	Adams Bashforth
Scheme 2	2step Lax-Wendoroff	
Scheme 3	QUICK	Adams Bashforth

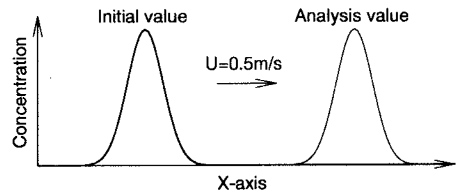

図1　解析の概念図

3．計算条件

図1のように一様流速の流れ場に正規分布を示す物質濃度を与え、式(1)あるいは式(2)を用いて解析を行い、解析値と理論値（式(1)では初期値の平行移動、式(2)では点源拡散の式の重ね合わせ）との比較により移流項差分スキームと格子スケールの影響を検討する。まず RUN1 では、空間的な格子スケールΔxを 100m から 1000m まで 100m ごとに 10 通り変化させて解析を行う。初期濃度分布は図2のように3ケースを上流側に設定した。CASE1 は初期濃度の総量が一定の場合であり、CASE2 は総量を格子スケールによって相似的に変化させた場合、CASE3 は総量を格子スケールによって変化させピーク値を一致させた場合である。つぎに RUN2 では、表2のように空間的な格子スケールを場所毎に変えて解析を行う。初期濃度分布は上流部の中央にピーク値が一致するように与えている。なお、本研究では、一様流速 0.5m/s、計算時間間隔 5s で計算した場合の 14000s 後における計算結果を用いて検討しており、拡散係数には$0.01\Delta x^{4/3}$を用いている。

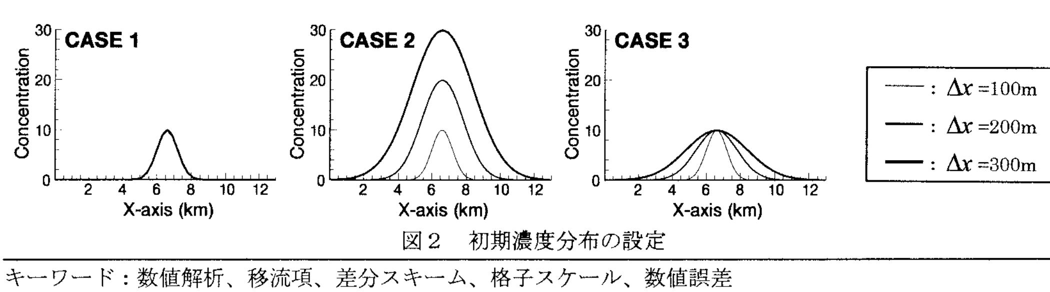

図2　初期濃度分布の設定

キーワード：数値解析、移流項、差分スキーム、格子スケール、数値誤差
連絡先：〒487-8501、愛知県春日井市松本町 1200、TEL0568-51-1111、FAX0568-52-0134

４．RUN1 の場合

CASE1 の計算結果を図３に示す。図３から移流方程式の場合、すべてのスキームで格子スケールが大きくなれば誤差も大きくなることが分かる。また、Scheme2 では位相差とダンピングが発生していた。これはΔxが大きいほど初期濃度分布は粗くなるために生じたものと考えられる。拡散方程式の場合、格子スケールが大きくなっても誤差値はそれほど変化していない。これは、拡散効果によりダンピングが抑えられたことによるものと考えられる。

CASE2 の計算結果を図４に示す。図４から、すべてのスキームで格子スケールが大きくなれば誤差は小さくなることが分かる。これはΔxが大きいほど初期濃度が大きくなるため、ここで定義した相対的な誤差値が小さくなったと考えられる。また、差分スキームを高次なものにすることで精度が飛躍的に良くなっていることが分かる。

CASE3 の場合、誤差値に関してはCASE2 と同じ結果(図４)を得た。これは、Δxが大きいほど滑らかな濃度分布を与えるため、数値誤差が抑えられたと考えられる。逆に、突出した濃度分布は数値誤差を発生させると考えられる。

表２　RUN2 におけるx方向格子幅の設定

区間	Model1	Model2	Model3	Model4	Model5	Model6	Model7
上流	100m	150m	300m	100m	100m	150m	300m
中流	100m	100m	100m	150m	300m	150m	300m
下流	100m	100m	100m	100m	100m	150m	300m

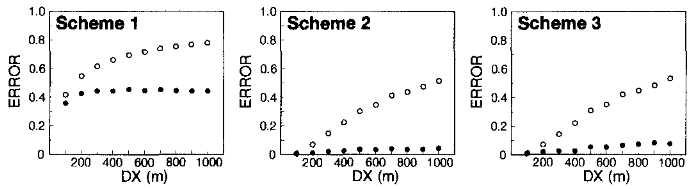

図３　RUN1 の計算結果(CASE1)

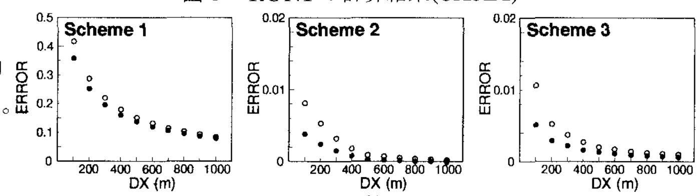

図４　RUN1 の計算結果(CASE2·3)

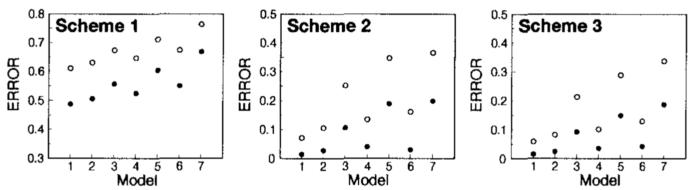

図５　RUN2 の計算結果

○…移流方程式による解　●…拡散方程式による解

ERROR：誤差値 $= \dfrac{\text{理論値のピーク値} - \text{解析値のピーク値}}{\text{理論値のピーク値}}$

(図４の Scheme2·3 は値が小さいので拡大している)

５．RUN2 の場合

計算結果を図５に示す。図５から部分的に格子スケールを粗くすると誤差は大きくなり、その精度は最も大きい格子スケールに依存していることが分かる。これは初期濃度分布や計算結果として得られる濃度分布の粗さによる影響と、格子スケールの大きさによる数値拡散の影響が考えられる。また、上流部よりも中流部で格子スケールを粗くした方が、誤差が大きくなることが分かる。これは、濃度分布のピーク値が格子スケールの粗い部分を通過する距離は、上流部よりも中流部の方が長いことによるものと考えられる。

６．おわりに

これらの検討より、拡散問題における格子スケールは、対象とする濃度分布が十分に表現でき、かつ滑らかとなるように設定すべきであることが、数値解析の観点から再確認された。また、勾配の大きい突出した現象については、ダンピングや位相差が発生するので適切な移流項差分スキームを選択する必要があり、高次の差分法を用いることで解析精度が飛躍的に向上することが示された。格子スケールを場所毎に変化させた場合、格子スケールの粗さと粗い部分の距離は解析精度に影響を与えることが示された。

参考文献　1)武田　誠：大村湾における潮汐流の３次元特性と温度成層の影響評価に関する研究、長崎大学修士論文、pp.46-87、1994.2.　2)小松利光・大串浩一郎・朝位孝二：拡散シミュレーションにおける移流輸送の高精度計算法の開発、土木学会論文集、No.456/Ⅱ-21、pp.37-46、1992.11.