

II-193 同次補間要素を用いた安定化有限要素法による非圧縮粘性流体解析

日本工営(株) 正員 ○桜庭 雅明
中央大学大学院 学生員 田中 聖三
中央大学 正員 檉山 和男

1. はじめに

非圧縮粘性流体流れの基礎方程式である Navier-Stokes 方程式を有限要素法で解く際に用いられる安定化手法は、近年多くの手法が提案されており、良好な計算結果が得られていることが報告されている¹⁾。本報告では、安定化有限要素法の一手法である SUPG/PSPG (streamline upwind /Petrov-Galerkin - pressure stabilizing /Petrov-Galerkin) 法を用いて計算を行い、計算法の有効性に関する検討を行うものである。有限要素には、複雑な境界形状に適用できるような P1/P1 (3 角形 1 次) 要素を用い、数値計算例として、孤立渦問題及び正方形 Cavity 問題に適用して、本手法の有効性の検討を行う。

2. 基礎方程式と定式化手法

2.1. 基礎方程式

非圧縮粘性流体の運動方程式と連続の式はそれぞれ式 (1), (2) で表される。

運動方程式：

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} - \mathbf{f} \right) - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0} \quad (1)$$

連続式：

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2)$$

ここで、 $\mathbf{u}$ は流速成分、 p は圧力、 ρ は密度、 $\mathbf{f}$ は物体力を表している。また、 $\boldsymbol{\sigma}$ は応力テンソルであり次式のようになる。

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + 2\mu\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \quad (3)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^t) \quad (4)$$

ここに、 $\mathbf{g}$ は流速の既知量を示し、 $\mathbf{n}$ は境界外向き単位法線ベクトルを示す。

2.2. SUPG/PSPG 法による定式化

本検討では、基礎方程式の定式化には P1/P1 (流速・圧力 1 次) 要素を用いた安定化有限要素法²⁾を適用する。基礎方程式に対して定式化を行う際に安定化項が導かれるが、計算の安定化を行うためのパラメータは、次式に示すものを用いた。

$$\tau_{\text{SUPG}} = \left(\left(\frac{2\|\mathbf{u}\| h}{h} \right)^2 + \left(\frac{4\nu}{h^2} \right)^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \quad (5)$$

$$\tau_{\text{PSPG}} = \tau_{\text{SUPG}} \quad (6)$$

$$\tau_{\text{CONT}} = \frac{h}{2} \|\mathbf{u}\| h \quad (7)$$

ここに、 τ_{SUPG} 、 τ_{PSPG} はそれぞれ移流項、圧力安定化、連続条件に関する安定化パラメータを表しており、 ν は渦動粘性係数を表す。なお、 h は要素サイズであり以下のようになる。

$$h = 2 \left(\sum_{e=1}^{nelm} s \cdot \nabla \cdot N_{\alpha} \right)^{-1} \quad (8)$$

なお、 s は単位ベクトルの方向成分、 N_{α} は要素の補間関数である。有限要素方程式を導出すると以下のようになる。

運動方程式：

$$(\mathbf{M} + \mathbf{M}_{\delta}) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{N}(\mathbf{u}) + \mathbf{N}_{\delta}(\mathbf{u})) \mathbf{u} + (\mathbf{K} + \mathbf{K}_{\delta}) \mathbf{u} - (\mathbf{G} + \mathbf{G}_{\delta}) p = \mathbf{F} + \mathbf{F}_{\delta} \quad (9)$$

連続式：

$$(\mathbf{G}^t + \mathbf{G}_{\phi}^t) \mathbf{u} + \mathbf{M}_{\epsilon} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{N}_{\epsilon}(\mathbf{u}) \mathbf{u} + \mathbf{K}_{\epsilon} \mathbf{u} + \mathbf{G}_{\epsilon} p = \mathbf{E} + \mathbf{E}_{\epsilon} \quad (10)$$

ここで、 $\mathbf{u}$ は流速ベクトル、 p は圧力、 $\mathbf{M}$ は質量行列、 $\mathbf{N}$ 、 $\mathbf{K}$ 、 $\mathbf{G}$ は係数行列、 $\mathbf{F}$ 、 $\mathbf{E}$ は外力ベクトルである。得られた有限要素方程式を連続式、運動量保存式を連立させると、以下の連立一次方程式が得られる。

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} + \mathbf{M}_{\delta} & -(\mathbf{G} + \mathbf{G}_{\delta}) \\ \mathbf{M}_{\epsilon} + \mathbf{G}^t + \mathbf{G}_{\phi}^t & \mathbf{G}_{\epsilon} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u} \\ \Delta t p \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{d} \end{Bmatrix} \quad (11)$$

ここで、 $\mathbf{b}_i^n$ は運動方程式の既知項をまとめたものである。式を解くことによって、各時刻における流速並びに圧力を導出することが可能になるが、左辺のマトリクスが非対称になることから、方程式の求解には Element-by-Element Bi-CGSTAB 法を用いた。なお、時間方向の離散化には Crank-Nicolson 法を用いた。

3. 数値計算例

3.1. 孤立渦問題の解析

ベンチマーク問題として、孤立渦問題を取り上げる。図-1a-b に示すように初期条件を $u_{\theta} = \{5r \text{ for } r < 0.2,$

KeyWords: Stabilized FEM, Equal - Order Element, SUPG/PSPG Method
〒300-1259 茨城県稲敷郡基崎町稲荷原 2304
日本工営(株) 情報システム部
Tel : 0298(71)2035, Fax : 0298(71)2021

$2 - 5r$ for $0.2 < r < 0.4$, 0 for $r > 0.4$ } とする渦を強制的に発生させる。有限要素分割は P1/P1 要素の 20 分割 (441 節点, 800 要素) を用いた。流れが非粘性に近いので数値解が初期条件を保つ手法ほど, 減衰の少ない高精度な手法であると言える。図-1c に $t=3$ における本手法の渦度の鳥瞰図, 及び図-1d に SUPG/PSM 法³⁾ による渦度の鳥瞰図を示す。この結果から確認できるように, 本検討及び既往の方法で行った計算結果は両者とも比較的初期に近い状態の渦を保っている。なお, 図-1d に示す方法は Q1/P0 要素 (流速 1 次, 圧力 0 次補間の四角形要素) を用いている。SUPG/PSPG 法は同次補間 (P1/P1 要素) によって計算を行っているため, 要素形状の観点では SUPG/PSM 法に比べ任意境界形状の取り扱いが容易に行える観点から有効であるものと考えられる。

3.2. 正方形 cavity 問題の解析

安定化有限要素法による流れ場の計算における有効性を示すために, 正方形 cavity の流れ場解析を行った。解析領域及び計算条件を図-2a に示す。図に示すように, 境界条件として壁面で no-slip 条件を用い, 上方での水平流速を 1.0 とした。渦動粘性係数として 0.001, 有限要素の分割数は 32×32 (節点数 1089, 要素数 2048) とした。SUPG/PSPG 法を用いた場合における計算結果 ($\Delta t=0.1$ で 1000 ステップの計算) を図-2 (b: 圧力, c: 流速) に示す。この結果から見られるように, 流速・圧力において良好な結果が得られていることが確認される。また, 本手法の解析精度を検討することを目的として, Ghia の解析結果⁴⁾ との比較を行った。本手法との比較を図-2d に示す。本手法は流速の増大部でわずかに減衰が見られるものの, Ghia の結果と比較的良好一致を示している。

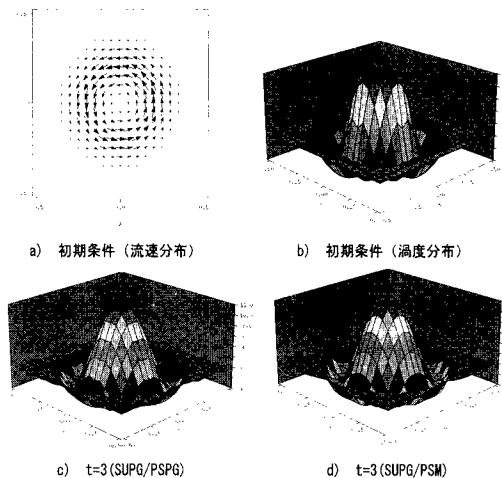


図-1 孤立渦問題計算条件及び結果の比較

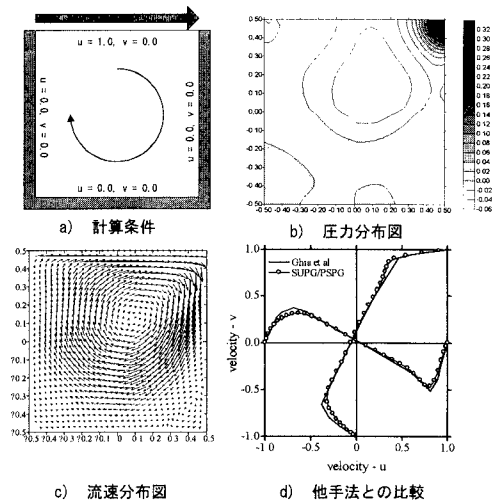


図-2 Cavity 計算条件及び結果

4. おわりに

本検討において, 同次補間を用いた安定化有限要素法による非圧縮粘性流体の解析を行い, 既往の解析手法との比較検討を行った。結果として, SUPG/PSPG 法を用いた計算結果は比較的高精度で安定した解を得ることが可能であり, 同次補間 (P1/P1) 要素で計算が行うことが出来ることなどから, 応用面での比較的複雑な形状を有するような解析にも適用できることが期待される。しかしながら, 本手法は有限要素方程式を直接分解することなく解析することから, 計算時間の観点では問題が残されている。今後は, 各種問題に適用を行うことと同時に本手法を自由表面の有する流れに適用することを予定している。

参考文献

- 1) Brooks, A.N. and Hughes, T.J.R. (1991): Streamline up-wind / Petrov-Galerkin formulations for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible Navier-Stokes equations, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 87, pp.364-384
- 2) T.E.Tezduyar, S. Mittal, S.E. Ray, and R. Shih, (1992): Incompressible flow computations with stabilized bilinear and linear equal-order-interpolation velocity-pressure elements, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 95, pp.221-242
- 3) 檜山和男, 猪俣渉 (1998): 混合補間要素を用いた非圧縮粘性流れ解析のための高精度安定化有限要素法, 土木学会論文集 No.591/I-43: pp.125-137
- 4) Ghia, U., Ghia, K.N. and Shin, C.T. (1982): High-Resolutions for incompressible flow using the Navier-Stokes equations and a multigrid method, J. Comput. physics, 48, pp.387-411