土木学会第54回年次学術講演会（平成11年９月）

I －B 266　薄肉直線桁のねじり振動に関する数値解析的検討

北海道大学大学院工学研究科　正会員　松井義孝
北海道大学大学院工学研究科　フェロー　林川俊郎
北海道大学大学院工学研究科　学生員　北島　勉
北海道大学大学院工学研究科　フェロー　佐藤浩一

１．まえがき

構造物の動的応答は、その構造物に作用する外力の性質と構造物自身の固有振動特性、すなわち固有振動数や固有振動モードに大きく左右される。したがって、構造物の動的応答を正しく評価するためには、固有振動数ならびに固有振動モードを精度良く計算することが重要な課題であると言える。

筆者らは、薄肉直線桁のねじり振動に関する基礎微分方程式の一般解を用いて、新たに動的な剛性マトリックスを誘導している。さらに求められた固有円振動数に対応する固有関数を算出するための積分定数マトリックスを提示している[1]。そこで本研究の目的は、開断面と閉断面を有する薄肉直線桁を数値計算例として取り上げ、異なる質量マトリックス法による固有振動数の精度とその要素分割数の影響について比較検討することである。さらに、新しく誘導した薄肉直線桁のねじり振動に関する動的剛性マトリックスの各要素を部材長に関してテイラー展開し、異なる質量マトリックス法との数学的な特徴と位置関係について明らかにすることを目的としている。

２．ねじり振動解析

薄肉直線桁のねじり振動解析は、部材要素の質量のモデル化により、離散座標系による解と分布座標系による解に分類することができる[2]。さらに、前者には部材要素の等分布質量を両端の節点に等しく置換する集中質量法と、変位関数として３次多項式を用いて部材要素の質量を両端の節点に配分する整合質量法が代表的な方法である。後者には薄肉直線桁の質量およびねじり剛性等の力学的特性を連続的な分布量として取り扱う連続質量法 がある。

さて、分布座標系による解では、ねじり自由振動に関する基礎微分方程式は、次のように与えられる。

$$EI_w \frac{\partial^4 \theta}{\partial x^4} - GJ \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + mr^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = 0 \tag{1}$$

ここで、EIw はそりねじり剛性、GJ は St. Venant のねじり剛性、m は質量、r は断面二次半径、θ はねじり角である。上式の θ に関して一般解を求めることにより、動的剛性マトリックスが誘導される[2]。この動的剛性マトリックスは通常の静的剛性マトリックスと同様に、振動系が線形であることから重ね合わせることができる。構造物の境界条件による拘束節点変位の処理を施すと、固有円振動数 ω を求めるための振動数方程式は次のように得られる。

$$\det\left|\mathbf{K}(\omega)\right| = 0 \tag{2}$$

ここで、動的剛性マトリックス $\mathbf{K}(\omega)$ の各要素 k_{ij} を部材長 L=0 のまわりで Taylor 展開し連続質量法による解と集中質量法および整合質量法による解との数学的な位置関係について考える。動的剛性マトリックス $\mathbf{K}(\omega)$ の他の要素に対しても、同様のベキ級数展開を施すと、次のようなマトリックス関係式が得られる。

$$\mathbf{K}(\omega) = \mathbf{K}_0 \cdot EI_w + \mathbf{G}_0 \cdot GJ - \mathbf{M}_0 \cdot \omega^2 - \mathbf{G}_1 \cdot (GJ)^2 + \mathbf{M}_1 \cdot GJ\omega^2 + \mathbf{G}_2 \cdot (GJ)^3 + \cdots \tag{3}$$

上式(3)の右辺の第１項および第２項を重ね合わせた係数マトリックス($\mathbf{K}_0 \cdot EI_w + \mathbf{G}_0 \cdot GJ$)はそりねじり変形に関する静的剛性マトリックス $\mathbf{K}_s$ と同一である。また、この係数マトリックス $\mathbf{K}_0$ は桁の曲げ変形に関する静的剛性マトリックスに対応し、係数マトリックス $\mathbf{G}_0$ は桁の座屈問題における幾何学的剛性マトリックス（または初期応力マトリックス）に類似していることがわかる。さらに、第３項の係数マトリックス $\mathbf{M}_0$ は整合質量マトリックス $\mathbf{M}_c$ に完全に一致している。式(3)の右辺第４、５、６項の係数マトリックス $\mathbf{G}_1$、$\mathbf{M}_1$、$\mathbf{G}_2$ は動的剛性マトリックス $\mathbf{K}(\omega)$ を Taylor 展開した場合の高次の項である。

キーワード　：ねじり振動，そりねじり，質量マトリックス法，テイラー展開
〒060-8628 札幌市北区北 13 条西 8 丁目北海道大学大学院工学研究科：TEL(011)706-6172, FAX：(011)726-2296

3．数値計算結果

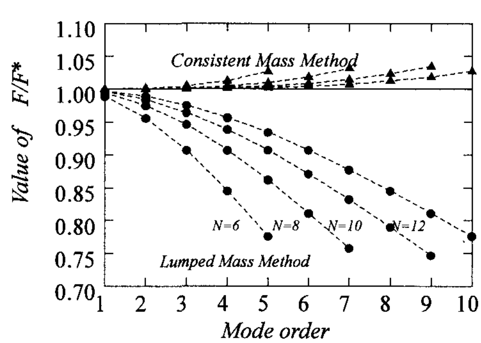
数値解析例として、単径間直線桁および２径間連続桁について考える。いずれの直線桁も開きあるいは閉じ断面の等断面とし、等支間長(L=31.5m)を有するものとする。離散座標系における連続桁の要素分割数は各径間長を等分割した６分割、８分割、１０分割、１２分割の４通りについて考える。一方、分布座標系における連続桁の全要素分割数は分割数によらず厳密解を求めることができることから、支間数と同値とする。つまり、連続質量法による 2 径間連続桁の全要素分割数は径間数と同じ２とする。連続桁の各支承上の境界条件はねじり角のみを拘束するものとする。さらに、数値計算に必要な断面諸元は以下の通りである。St. Venant のねじり剛性 GJ=6.269×10¹ tm^2 (2.846×10⁶)、そりねじり剛性 EI_w=8.379×10⁶ tm^4 (1.363×10⁶)、極慣性モーメント I_p=0.4791m^4(1.1023)断面積 A=0.1610m^2(0.2033)、単位長さ当たりの重量 w=1.270 t/m(1.598)。なお、かっこ内数値は、閉断面に対応している。集中質量法および整合質量法により計算された単径間直線桁と２径間連続桁の 1 次から 10 次モードまでの固有振動数と厳密解との比をそれぞれ図―１、２に示す。連続質量法により求められた固有振動数は厳密解である。図中の●印は集中質量法による解、▲印は整合質量法による解である。集中質量法により計算された固有振動数の値は厳密解に対して下界値を、整合質量法による解は上界値を与えることがわかる。高次固有振動モードになるにつれて、集中質量法により求められた固有振動数の精度が低下する傾向にある。集中質量法による解は同じ要素分割数の整合質量法による解に比較して固有振動数の精度はかなり悪いことが認られる。ただし、要素分割数 N を増加することにより、解の精度が向上することがわかる。また、２径間連続桁では、径間数に応じて２個ずつ固有振動数の接近があり、固有振動モード群が形成されていることが理解できる。以上、開断面桁の数値計算について示したが、閉断面桁についても同様の傾向が認められる。

4．あとがき

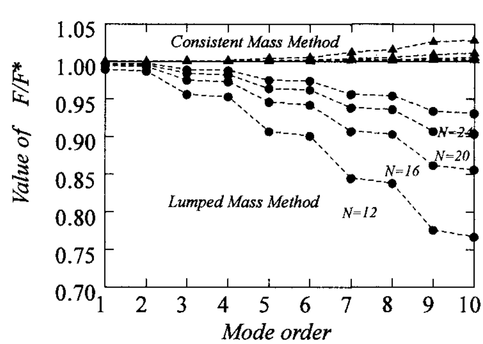
本研究は２軸対称薄肉断面を有する直線桁のねじり固有振動解析にともなう解の精度について、集中質量法、整合質量法および連続質量法による数値計算を行なった。ここで得られた結論および今後の研究課題についてまとめると次のようになる。

集中質量法により計算された薄肉直線桁のねじり固有振動数は厳密解に対して下界値を、整合質量法による解は上界値を与える。連続桁の要素分割数が増加するにつれて、近似解法による解は厳密解に近づく傾向がある。また、同じ要素分割数では整合質量法により求められた固有振動数の値は、集中質量法を用いる場合よりもかなり良い精度で計算できることがわかった。等断面等支間長を有する連続桁のねじり固有振動数は、その径間数に応じた固有値の接近が見られ、固有振動モード群を形成する。また、単径間直線桁の各次数に応じた固有振動モードは２径間連続桁の固有振動モードの中にも再現され、そのねじり固有振動数の値および厳密解に対する誤差は同じように繰り返されることが確認された。今後の研究課題として、２軸非対称薄肉開断面を有する直線桁および曲線桁等における固有振動数とその精度について検討する必要がある。２軸非対称断面桁は図心とせん断中心の位置が異なることから、水平および鉛直曲げ振動とねじり振動とが連成することになる。よって、集中質量法、整合質量法および連続質量法による固有振動数の精度と連成効果については今後の重要な検討課題となるであろう。

【参考文献】
1)林川俊郎・松井義孝・北島勉・佐藤浩一：薄肉直線桁のねじり振動に関する解析的研究，応用力学論文集,Vol.1,pp.303-310,1998.
2)松井義孝・林川俊郎・北島勉・佐藤浩一：薄肉開断面桁のねじり振動解析,土木学会北海道支部論文報告集,Vol.55,pp.378-383,1999.



図―1　単径間直線桁の固有振動数比



図―2　２径間連続桁の固有振動数比