I－B88　地盤震動解析における振動論と波動論の等価性に関する一検討

東電設計　正会員　松原勝己

1．まえがき　地中構造物の耐震設計を実施する際には、地震時の地盤変位を推定することが重要課題となる。現状の設計指針によれば、構造物周辺地盤が均質に近い場合には表層地盤の一次変形モードに基づく地中変位が設定されている。一方、構造物周辺地盤が成層構造を有する場合にはプログラム SHAKE に代表されるような一次元地盤応答解析を実施して地中変位が設定されることが多い。前者はモード合成法に基づく振動論的な立場の方法であるのに対して、後者は振動数領域の伝達関数から地盤応答を求める波動論的な立場の方法であるといえる。したがって、両者の方法の理論的な関係を明らかにしておく必要があると考えられる。モード解析と波動論的な手法との関係については、片山ら[1]が棒材の縦振動を例に挙げてその等価性を説明している。本報は、基盤を剛と仮定した一層系地盤を対象として、地盤震動の基本方程式を出発点としモード合成法を経由して地盤の伝達関数を求めることにより、モード合成法と波動論の等価性を検討したものである。

2．基本方程式　対象とする地盤として、図-1に示すように剛な基盤上に均質な物性を有する表層が存在する一層系地盤を仮定する。ただし、表層は内部減衰を有するものとする。基盤上での水平地震動によって表層地盤がせん断震動するとき、地盤中の微小要素に関する力の釣り合いを考える。微小要素に作用する力は式(1)から(3)で表される[2]。

慣性力：$\gamma/g\{\partial^2 u(z,t)/\partial t^2 + u_g(t)\}dz$　(1)

要素下面のせん断応力：$\tau = G\partial u(z,t)/\partial z + \eta\,\partial^2 u(z,t)/\partial t\partial z$　(2)

要素上面のせん断応力：$\tau + d\tau = G\partial u(z,t)/\partial z + \eta\,\partial^2 u(z,t)/\partial t\partial z + \partial/\partial z\{G\partial u(z,t)/\partial z + \eta\,\partial^2 u(z,t)/\partial t\partial z\}dz$　(3)

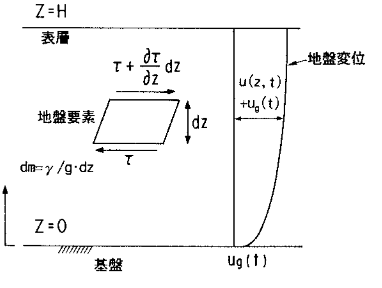

図-1 解析モデル

ここに、γ:地盤の単位体積重量、G:地盤のせん断弾性係数、η:地盤の減衰係数、u(z,t):z の位置での時刻 t の相対水平変位、$u_g(t)$:時刻 t の基盤の変位　である。微小要素に関する力の釣り合いから、表層地盤の相対変位 u(z,t)に関する基本方程式が式(4)で得られる。

$$\gamma/g\cdot\partial^2 u(z,t)/\partial t^2 - \eta\,\partial^3 u(z,t)/\partial t\partial z^2 - G\partial^2 u(z,t)/\partial z^2 = -\gamma/g\cdot\ddot{u}_g(t) \quad (4)$$

さらに、式(4)で $u(z,t)=u_A(z,t)-u_g(t)$　により絶対変位 $u_A(z,t)$に置き換えれば、式(5)を得る。

$$\gamma/g\cdot\partial^2 u_A(z,t)/\partial t^2 - \eta\,\partial^3 u_A(z,t)/\partial t\partial z^2 - G\partial^2 u_A(z,t)/\partial z^2 = 0 \quad (5)$$

3．一層系地盤の伝達関数　式(5)を用い、$u_A(z,t)=U_A(z,\omega)e^{i\omega t}$と置いて振動数領域で表し、複素減衰を仮定して $\eta=2hG/\omega$（h:減衰定数）を考慮すれば、式(6)を得る。

$$\omega^2 U_A + (Vs^*)^2\partial^2 U_A/\partial z^2 = 0 \quad (6)$$

ここに、$Vs^*=Vs\sqrt{(1+2ih)}$（複素せん断波速度）、$Vs=\sqrt{(gG/\gamma)}$（せん断波速度）である。
式(6)の一般解は式(7)で表される。

$$U_A = A\exp(ik^*z) + B\exp(-ik^*z) \quad (7)$$

ここに、$k^*=\omega/Vs^*$であり、A および B は境界条件によって決まる任意定数である。境界条件として、基盤上で変位 $u_g(t)$に等しいこと、地表面でのせん断応力がゼロであることを指定する。すなわち、

$z=0$　で　$u_A(z,t)=u_g(t)$　(8a)　　　$z=H$　で　$\tau=G\partial u_A/\partial z$　(8b)

キーワード：地盤震動、地中構造物、耐震設計法、モード合成法、波動論的手法、地中変位
連絡先（住所：〒110-0015 東京都台東区東上野 3-3-3 東電設計上野ｾﾝﾀｰ 6F　TEL：03-5818-7793
FAX：03-5818-7608）

式(8a)および(8b)より、AおよびBの連立方程式が得られ、これを解いて式(7)に代入すれば、$U_A(z,\omega)$が求められる。その結果、地表面の加速度の伝達関数$H_A(H,\omega)$が、式(9)で得られる。

$$H_A(H,\omega)=\ddot{U}_A(H,\omega)/\ddot{U}_g(\omega)=1/\cos(k^*H)=1/\cos\{\omega H/Vs\sqrt{(1+2ih)}\} \quad (9)$$

4．モード合成法　モード合成法を用いるために、地盤の相対変位u(z,t)を式(10)の形に置く。

$$u(z,t)=\Sigma\,\phi_j(z)\cdot q_j(t) \quad (10)$$

ここに、$\phi_j(z)$:j次の地盤の変形モード、$q_j(t)$:モードに依存する時間関数　である。$\phi_j(z)$については、式(11)が成立する。

$$d^2\phi_j(z)/dz^2+(\omega_j/Vs)^2\phi_j(z)=0 \quad (11a) \qquad \omega_j=(2j-1)\pi Vs/(2H) \quad (11b) \qquad \phi_j(z)=\sin\{(2j-1)\pi z/(2H)\} \quad (11c)$$

式(10)を振動数領域で書けば、式(12)が得られる。

$$U(z,\omega)=\Sigma\,\phi_j(z)\cdot Q_j(\omega) \quad (12)$$

式(4)を用い、$u(z,t)=U(z,\omega)e^{i\omega t}$と置いて振動数領域で表すと、式(13)を得る。

$$-\gamma/g\cdot\omega^2U-(G+i\eta\,\omega)\partial^2U/\partial z^2=-\gamma/g\cdot\ddot{U}_g(\omega) \quad (13)$$

式(13)に式(12)を代入し、$\eta=2hG/\omega$および式(11)を用いれば、式(14)が得られる。

$$\Sigma\,\phi_j(z)\{-\omega^2+\ \omega_j^2(1+2ih)\}Q_j(\omega)=-\ddot{U}_g(\omega) \quad (14)$$

式(14)の両辺に$\phi_k(z)$を掛けzで0～Hまで積分すれば、$\int\phi_k(z)\phi_j(z)=0\ (k\neq j)$を考慮し、式(15)を得る。

$$Q_j(\omega)=-\mu_j\ddot{U}_g(\omega)/(\omega_j^2-\ \omega^2+2ih\,\omega_j^2) \quad (15a)$$

$$\mu_j=\int\phi_j(z)dz/\int\{\phi_j(z)\}^2dz \quad (15b)$$

式(12)および(15)より、地表面における相対変位の伝達関数$H(H,\omega)$は、式(16)で表される。

$$H(H,\omega)=U(H,\omega)/\ddot{U}_g(\omega)=\ \Sigma\{-\mu_j\phi_j(H)/(\omega_j^2-\ \omega^2+2ih\,\omega_j^2)\} \quad (16)$$

式(11)および(15)より、$\mu_j=\mu_1/(2j-1)$　$\phi_j(H)=(-1)^{j-1}$　$\omega_j=(2j-1)\omega_1$　が成立するから、式(17)を得る。

$$H(H,\omega)=\ \Sigma[-\mu_1(-1)^{j-1}/(2j-1)\{(1+2ih)\omega_1^2(2j-1)^2-\omega^2\}] \quad (17)$$

加速度の伝達関数$H_A(H,\omega)$は、式(18)で与えられる。

$$H_A(H,\omega)=\{\ddot{U}(H,\omega)+\ddot{U}_g(\omega)\}/\ddot{U}_g(\omega)=-\omega^2H(H,\omega)+1 \quad (18)$$

式(17)および(18)より、式(19)が得られる。

$$H_A(H,\omega)=1-\ \mu_1\Sigma[(-1)^{j-1}/(2j-1)-(-1)^j(2j-1)/\{\omega^2/(1+2ih)\omega_1^2-(2j-1)^2\}] \quad (19)$$

ここで、級数公式[3]　$\Sigma(-1)^{j-1}/(2j-1)=\pi/4$　および　$\Sigma(-1)^j(2j-1)/\{x^2-(2j-1)^2\}=\pi/\{4\cos(\pi x/2)\}$　を用い、さらに$\mu_1=4/\pi$　および　$\omega_1=\pi Vs/(2H)$　を考慮すれば、式(20)を得る。

$$H_A(H,\omega)=1/\cos\{\omega H/Vs\sqrt{(1+2ih)}\} \quad (20)$$

式(20)は、先の式(9)に一致している。すなわち、モード合成法において高次モードまで正確に評価することにより、波動論的な手法による結果と一致することを示している。

5．あとがき　本報では、一層系地盤を対象として振動論的な手法であるモード合成法と波動論的な手法との等価性を検討し、モード合成法で高次モードを十分な精度を損なわない程度に評価すれば、波動論的手法の結果と一致することを示した。なお、感覚的に捉えると、振動と波動は異なる現象であり別の解析手法に依る必要があると解釈することにもなるが、振動と波動は同一の物理現象が条件の違いで見かけ上異なったものになると考えられる。対象としている物体の代表長さL（波動が往復する距離）、波動伝播速度cおよび振動周期Tとしたとき、T≫L/cの場合が「振動的」となり、T≪L/cの場合が「波動的」になると考えられる。すなわち、一揺れの時間に対して運動の伝わり方が相対的に速い場合を「振動的」と表現し、一揺れの時間に対して運動の伝わり方が相対的に遅い場合を「波動的」と表現するものと考えられる。

<参考文献> 1)片山恒雄･宮田利雄･国井隆弘(1979)：土木学会編・新体系土木工学10構造物の振動解析、技報堂出版 2)Ohsaki, Y(1982)：Dynamic Characteristics and One-Dimensional Liear Amplification Theory of Soil Deposits, Department of Archtecture, Faculty of Engineering, University of Tokyo 3)森口繁一･宇田川かね久･一松信(1992)：岩波数学公式Ⅱ、岩波書店