

I - B 48

システム同定のための起振器入力

武蔵工業大学 正会員 丸山 收

1. はじめに

構造物の維持管理または補修計画を作成する上で、構造物が保有する動的性能または損傷の程度を精度良く把握する事が必要となる。例えば損傷部位の情報を構造物の目視等の観察から直接に得ることが出来ない場合には、起振器入力を与え、応答データから内部状態を同定することとなる。本研究では、継続的なモニタリングにより事前情報がある程度正確に与えられる場合を想定し、文献(1)をもとに、単一または複数の起振器を用いて、注目する構造系の部位を効果的に励振させ、同定を効率的に行うための加振入力を作成する方法について検討する。

2. 加振入力の作成^{(1), (2)}

n 自由度振動系において、 $f_i(t)$:加振入力($i=1, 2, \dots, r$)とすると、振動方程式は次式ようになる。

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{y}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{y}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{y}(t) = \mathbf{B}\mathbf{f}(t) \quad (1)$$

ここで、 $\mathbf{M}$:質量行列($n \times n$)、 $\mathbf{C}$:減衰行列($n \times n$)、 $\mathbf{K}$:剛性行列($n \times n$)、 $\mathbf{B}$:係数行列($n \times r$)である。係数行列 $\mathbf{B}$ により、起振器の数および場所が与えられる。

式(1)をフーリエ変換して周波数領域に変換する。

$$\mathbf{Y}(j\omega) = \mathbf{G}(j\omega)\mathbf{B}\mathbf{F}(j\omega) \quad (2)$$

$$\mathbf{G}(j\omega) = [\mathbf{K} + j\omega\mathbf{C} - \omega^2\mathbf{M}]^{-1} \quad (3)$$

構造系の応答を評価するために、次の2次形式の評価関数を考える。

$$J = \mathbf{Y}^H(j\omega)\mathbf{P}\mathbf{Y}(j\omega) \quad (4)$$

$$\mathbf{P} = \text{diag}(p_1, p_2, \dots, p_n) \quad \text{with } p_i \geq 0 \quad (5)$$

ここで、 $\mathbf{Y}(j\omega)^H$ は複素ベクトル $\mathbf{Y}(j\omega)$ のエルミート転置であり、 $\mathbf{P}$ により応答の相対的な重み付けがなされる。

加振器の出力パワーは次式で与えられるものとする。

$$\mathbf{F}^H(j\omega)\mathbf{F}(j\omega) = \mathbf{E} \quad (6)$$

式(6)の拘束条件のもとで、ラグランジュの未定乗数法を用いて、式(7)を最大とする入力を求めることを考える。

$$\tilde{J} = \mathbf{Y}^H(j\omega)\mathbf{P}\mathbf{Y}(j\omega) + \lambda [\mathbf{E} - \mathbf{F}^H(j\omega)\mathbf{F}(j\omega)] \quad (7)$$

式(7)に式(2)を代入すると次式を得る。

$$\tilde{J} = \mathbf{F}^H(j\omega)\mathbf{Q}(j\omega)\mathbf{F}(j\omega) + \lambda [\mathbf{E} - \mathbf{F}^H(j\omega)\mathbf{F}(j\omega)] \quad (8)$$

$$\mathbf{Q}(j\omega) = \mathbf{B}^H\mathbf{G}^H(j\omega)\mathbf{P}\mathbf{G}(j\omega)\mathbf{B} \quad (9)$$

$\mathbf{Q}(j\omega)$ 、 $\mathbf{F}(j\omega)$ の実数部と虚数部を次式のようにおく。

$$\mathbf{Q}(j\omega) = \mathbf{Q}_R(j\omega) + j\mathbf{Q}_I(j\omega) \quad (10)$$

$$\mathbf{F}(j\omega) = \mathbf{F}_R(j\omega) + j\mathbf{F}_I(j\omega) \quad (11)$$

$\mathbf{Q}(j\omega)$ は、 $\mathbf{Q}(j\omega) = \mathbf{Q}^H(j\omega)$ を満たすので、 $\mathbf{Q}_R$ は実対称行列、 $\mathbf{Q}_I$ は実反対称行列となる。また $\mathbf{Q}_I$ は、 r 次列行列 $\mathbf{v}$ を用いると、 $\mathbf{v}^T\mathbf{Q}_I\mathbf{v} = 0$ を満たす。この性質と式(10),(11)を用いて、式(8)は次式のようになる。

$$\tilde{J} = \mathbf{F}_R^T\mathbf{Q}_R\mathbf{F}_R + \mathbf{F}_I^T\mathbf{Q}_R\mathbf{F}_I + 2\mathbf{F}_I^T\mathbf{Q}_I\mathbf{F}_R - \lambda [\mathbf{F}_R^T\mathbf{F}_R + \mathbf{F}_I^T\mathbf{F}_I] + \lambda \mathbf{E} \quad (12)$$

式(12)の最大化を行う際に、 $\frac{\partial \tilde{J}}{\partial \mathbf{F}_R} = \frac{\partial \tilde{J}}{\partial \mathbf{F}_I} = 0$ であることを考慮して次式を得る。

$$\tilde{\mathbf{Q}}\mathbf{F} - \lambda\mathbf{F} = 0 \quad \text{但し、} \tilde{\mathbf{Q}} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_R & -\mathbf{Q}_I \\ \mathbf{Q}_I & \mathbf{Q}_R \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_R \\ \mathbf{F}_I \end{bmatrix} \quad (13)$$

キーワード: 構造同定, 健全度診断, 検査手法, 振動,

連絡先: 〒158-8557 世田谷区玉堤 1-28-1 TEL 03-3703-3111(ex.3269) FAX 03-5707-2187

$\mathbf{Q}_1$ は実反対称行列より, $\tilde{\mathbf{Q}}$ は対称行列となるので, λ (対称行列 $\tilde{\mathbf{Q}}$ の固有値) と $\tilde{\mathbf{F}}$ (対称行列 $\tilde{\mathbf{Q}}$ の固有ベクトル) は実数になる. 以上より最適値 J_{opt} は, 式(14)で与えられる.

$$J_{opt} = \lambda \tilde{\mathbf{F}}^T \tilde{\mathbf{F}} = \lambda E \quad (14)$$

式(14)から, $\tilde{\mathbf{Q}}$ の固有値が最大 ($= \lambda_{max}$) のときの固有ベクトル $\tilde{\mathbf{F}}$ を求めると, 周波数領域における振幅と位相の比を求めることができる. $\tilde{\mathbf{F}}$ が式(6)を満たすようにし, フーリエ逆変換により入力の時系列を求めることができる.

3. 数値計算例

図-1に示す構造系において, 入力に関して $E = 850(\text{N}\cdot\text{s}/\text{rad})^2$ として, 質点1および質点3において加振する継続時間10秒の最適入力 $\mathbf{F}_{opt}$ を求めた (図-2(a), 図-2(b)). 加振点は質点1および質点3であり, 加振器を2台用いることになる. 構造系の諸元を表-1に示す.

ここでは, 各質点の変位波形に対する重み P を $P_1 = P_2 = P_3 = P_4 = P_5 = 1$ (相対的な重要度の重み付けはない) とする入力波を作成した. 図-3に得られた各質点の応答変位波形を示す.

次に, 重み P を $P_1 = P_2 = P_4 = P_5 = 1, P_3 = 1000$ とする入力波 (図-4(a),(b)) を作成し, 質点1および質点3に入力し, 応答計算を行った. 質点1から質点5の相対応答変位を (図-5(a)~(e)) に示す.

図-3(c)および図-5(c)において, 2ケースの質点3の応答を比較すると, 相対的な重み付けを行った質点3の応答変位振幅が大きくなっていることが分かる.

4. まとめ

本研究では, 文献(1)にもとづいて, システム同定のための加振入力作成の理論検証を行った. その際, 構造物の特定の部位を励振させる入力を作成するための定式化にもとづいて, 数値シミュレーション例を示した. 継続的なモニタリングにより事前情報が与えられている場合には, 着目する部位を効果的に励振させることが可能となる.

本研究では変位応答のみの解析を行ったが, 速度および加速度波形に対する観測データの種別に関する検討, 加えてパラメータを精度良くするための観測点位置についても検討することが必要である.

参考文献

- (1) C.W.deSilva: Optimal Input Design for the Dynamic Testing of Mechanical System; ASME 118, Vol.109, June 1987
- (2) 田坂 隆士: 2次形式; 岩波基礎数学選書, 1991

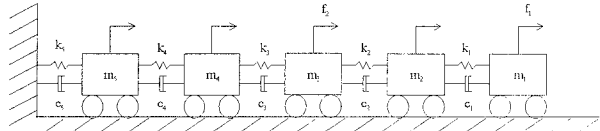


Fig.1 5自由度系
table1.質点の m, c, k の値

	質点1	質点2	質点3	質点4	質点5
$m(\text{kg})$	25	20	15	10	5
$c(\text{N}\cdot\text{sec}/\text{m})$	125	250	500	625	1250
$k(\text{N}/\text{m})$	625	2500	10000	15625	62500

