土木学会第54回年次学術講演会（平成11年9月）

I－B36 速度依存の非線形性を有する系の収束計算を伴わない時間積分法

京大防災研 正会員 本田 利器
京大防災研 正会員 澤田 純男

1 はじめに

地震工学をはじめとする多くの分野において，動的解析の重要性は非常に高まっている．非線形問題を考慮するためには，時間領域における解析が必要であるが，これは，例えば周波数領域で解く線形問題に比較してはるかに不安定である．そのため，中央差分法等の陽解法による解析を行なう場合，サンプリング時間間隔を細かくする必要があり，大規模な解析を行なう場合などに多くの計算時間を要する．一方，Newmark の β 法等の陰解法による解析は比較的安定性が高く，したがって，サンプリング時間間隔を大きく設定できる．しかし，陰解法により非線形問題を扱う場合には，各時間ステップにおいて収束計算が必要になるため，やはり多くの解析時間を要することとなる．

本研究では，陰解法と陽解法の結合により，収束計算を伴なわずに時間積分を行う手法を提案する．なお，同様の手法がすでに Sun[1] や酒井 [2] らにより提案されているが，これらは変位依存の非線形性を有する問題を扱うものであり，速度依存性を有する問題は扱えないものであった．ここで提案する手法は酒井らの手法を拡張し，速度依存性を有する問題に対しての適用をはかったものである．

2 解析手法

解析手法について，運動方程式

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f(t, x, \dot{x}) \tag{1}$$

(m, c, k は質量，減衰及び剛性の各マトリクスを表す．) を対象として，時刻レベルを t_n から t_{n+1} に更新する手順について述べる．変位及び速度に依存する非線形性を有する問題はこの式 (1) により表現されるため，一般性を失なわない．以下では，時間 t_n における変位などを，x_n のように表す．

時刻 t_{n+1} における運動方程式は

$$m\ddot{x}_{n+1} + c\dot{x}_{n+1} + kx_{n+1} = f(t_{n+1}, x_{n+1}, \dot{x}_{n+1}) = f(t_{n+1}, x_n, \dot{x}_n) + \Delta f_x + \Delta f_{\dot{x}} \tag{2}$$

ここで，

$$\begin{aligned} \Delta f_x &= f(t_{n+1}, x_{n+1}, \dot{x}_n) - f(t_{n+1}, x_n, \dot{x}_n) & (3) \\ \Delta f_{\dot{x}} &= f(t_{n+1}, x_{n+1}, \dot{x}_{n+1}) - f(t_{n+1}, x_{n+1}, \dot{x}_n) & (4) \end{aligned}$$

とである．

提案する手法では，式 (2) の第 1 項に対する応答を陰解法である Newmark の β 法で算出する．(Sun[1] と同様に Wilson の θ 法を用いることも可能である．) Newmark の β 法により算出される値は，2 次精度である．したがって，右辺の各項に対する応答を 2 次精度以上で算出し，それらの和をとれば式全体が 2 次の精度を有する．第 2 項および第 3 項に対する応答は，それぞれ，変位および速度で定式化した中央差分法により算出する．ここで，第 2 及び 3 項に対する応答は，第 1 項だけが作用した場合の応答に対する「増分」を算出する必要がある．具体的な手順としては，時刻 $t < t_{n+1}$ においては静止している系を想定し，これに第 2，3 項で表される力が時刻 $t = t_{n+1}$ におけるインパルスとして作用した場合の応答を算出すればよい．ここで，変位を用いて定式化した中央差分法により算出した Δf_x に対する応答値は，

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= 0, & (5) \\ \dot{x}_{n+1} &= (m + c\frac{\Delta t}{2})^{-1} \Delta f_x \frac{\Delta t}{2}, & (6) \\ \ddot{x}_{n+1} &= (m + c\frac{\Delta t}{2})^{-1} \Delta f_{\dot{x}} & (7) \end{aligned}$$

キーワード：時間積分法，非線形，収束計算
連 絡 先：〒 611-0011 京都府宇治市五ヶ庄 京都大学防災研究所 honda@catfish.dpri.kyoto-u.ac.jp

となるため，x に関しては収束計算は不要となる．次に，以上により算出された $\dot{x}_{n+1}$ を用いて評価した $\Delta f_{\dot{x}}$ に対する応答値を，速度を用いて定式化した中央差分法により算出する．この解は

$$x_{n+1} = \dot{x}_{n+1} = 0, \tag{8}$$

$$\ddot{x}_{n+1} = m^{-1}\Delta f_{\dot{x}} \tag{9}$$

変位の場合と同様に，この解は $x_{n+1} = \dot{x}_{n+1} = 0$ を与えるため，x 及び $\dot{x}$ に関しての収束計算は不要である．以上の手順により，変位，速度及び加速度が収束計算を伴わずに算出される．

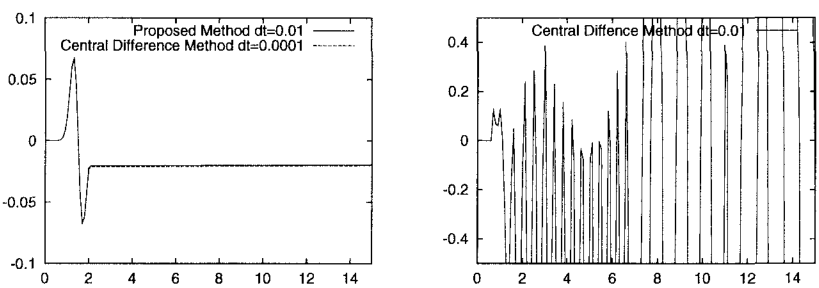
なお，本手法は，非線形外力のない場合の解析については，Newmark の β 法と同一の解法となるため，線形解析においては無条件安定の条件を満たす．

3 解析例

質量が 1 の質点 2 つを有する 2 自由度非線形系を対象とした解析を行った．線形領域における 1 次及び 2 次の固有周期はそれぞれ 3.74 秒と 0.05 秒である．速度依存の外力として，ここでは速度比例型の減衰を考え，Rayleigh 減衰において $\alpha = 100, \beta = 0$ とし，質量マトリクスに比例する減衰を与えた．入力波は Ricker 波とした．また，提案する手法による解析と比較するため中央差分法による解析も行った．

応答変位の時刻歴について，中央差分法により，計算時間間隔を小さく ($\Delta t = 0.0001$) 設定して算出して得られた解と，提案している手法で $\Delta t = 0.01$ として得られた解を図-1(a) に示す．両者は良く一致しており提案する手法の計算精度が十分なものであることが示されている．また，比較のため，同一の問題を中央差分法において $\Delta t = 0.01$ として計算した結果を同図 (b) に示す．この解析は発散し妥当な解は得られておらず，ここで示した例題が，陽解法を用いて計算すると，提案する手法と同等の時間間隔では解析ができないことを示している．

これらの結果より，提案する手法が，陽解法に比較して少ない計算量で十分な精度の結果を与えることが示された．



(a) 提案手法 ($\Delta t = 0.01$) 及び
差分法 ($\Delta t = 0.0001$)

(b) 差分法 ($\Delta t = 0.01$)

図 1: 提案した手法と差分法により算出した非線形系の応答時刻歴の比較

4 まとめ

速度依存の非線形性を有する系の時間積分を，陰解法と陽解法を結合させた手法により，収束計算を伴わずに，安定的に行う手法を提案した．提案した手法を用いて行った試算においては，時間間隔を小さく設定した差分法により得られた結果と一致する解を与えるなど，その有効性が示された．

ここで示した例では，陰解法として Newmark の β 法を用いたが，これ以外にも，無条件安定性のみならず，高周波成分を除去する特性を有する Wilson の θ 法，や筆者らの提案している手法 [4] 等と組み合わせる等の応用も考えられる．この点については今後の課題である．

参考文献

[1] 酒井久和ほか：収束計算を伴わない動的非線形 FEM のための時間積分法，土木学会論文集, No.507/I-30,1995

[2] K.Sun et al.: A post-correction integration for non-linear dynaic analysis of structures, EESD, 20, 1991

[3] 本田利器ほか：ディジタルフィルタを内蔵した時間積分法, 応用力学論文集 Vol.1,1998.