I－B28

離散固有値および連続固有値を用いたGreen関数の漸近展開表示について

東京理科大学　学生員　中川　英則
東京理科大学　正会員　東平　光生

1. はじめに

一般に成層構造を持つ波動場を表すGreen関数は，Hankel変換を介することで波数積分で表現される．この波数積分は被積分関数に，水平方向に関した座標成分を変数とするBessel関数を含むため，水平方向への漸近展開に帰着し易い形となっている．本研究では，複素領域に拡張された波数積分に適当なRiemann面を考慮することで，Laplace変換型の積分に移し，ここにWatsonの補助定理(*1)を用いることで漸近展開を行う方法を提示している．なお，この方法ではRiemann面は層数によらない決まった形として現れ，漸近展開はLambの論文(*2)で示されるような，表面波に関する留数定理からの寄与と実体波に関する分岐線回りの積分からの寄与という形を保ったまま分解される．この２つの寄与がそれぞれ離散並びに連続スペクトルに関係していることから(*3)，スペクトル分解という一連の流れの中で漸近展開を見ることができる利点を持つ他，Green関数の式からでは直接的に見通せなかった特性を提示してくれる利点を持つ．

2. 層構造をなす弾性流体の波動場を表すGreen関数の漸近展開表示

本紙面では，具体例として**Fig.1**に示す2層からなる弾性流体の波動場を扱う．$\rho_i\ (i=1,2)$ は各層における媒質の質量密度，$\alpha_i\ (i=1,2)$ は各層における媒質の音波速度を表している．また，z は鉛直座標，S は震源を表す．この時，この波動場を表すGreen関数は次式の波数積分で与えられる．

$$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty kJ_0(kr)E_k(z,z')dk=\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^\infty kH_0^{(2)}(kr)E_k(z,z')dk \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

ここに，J_0は第1種Bessel関数，$H_0^{(2)}$は第２種Hankel関数であり，$E_k(z,z')$は次式となっている．

$$E_k(z,z')=\frac{E_k^*(z,z')}{\nu_1\cosh(\nu_1 H)+\eta_1\nu_2\sinh(\nu_1 H)} \cdots\cdots (2)$$

（$0\le z\le z'$）の時

$$E_k^*(z,z')=\frac{\sinh(\nu_1 z)}{\nu_1}\times [\nu_1\cosh\{\nu_1(H-z')\}+\eta_1\nu_2\sinh\{\nu_1(H-z')\}]$$

（$z'\le z\le H$）の時

$$E_k^*(z,z')=\frac{\sinh(\nu_1 z')}{\nu_1}\times [\nu_1\cosh\{\nu_1(H-z)\}+\eta_1\nu_2\sinh\{\nu_1(H-z)\}]$$

（$H\le z$）の時

$$E_k^*(z,z')=\eta_1\sinh(\nu_1 z')\exp\{-\nu_2(z-H)\}$$

ここに，$\eta_1=\rho_1/\rho_2$ であり，$\nu_1=\sqrt{k^2-k_{\alpha_1}^2}$，$\nu_2=\sqrt{k^2-k_{\alpha_2}^2}$ とする．

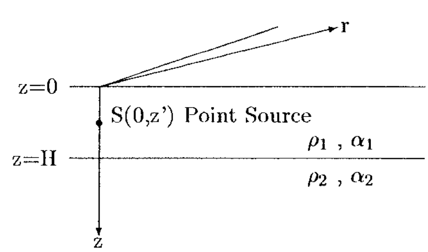

Fig.1 Point source in two-layered liquid half space

ここで波数を複素数にまで拡張し，さらに多価関数 ν_2 の分岐を考慮して積分経路を**Fig.2**のように変形する．但し，ここで示されているRiemann面は，半無限層内での波動のRadiation ConditionとRiemann Cut上での被積分関数の解析接続性を考慮したPermissible Sheetとなっており，また，積分経路は(1)式で示される積分をLaplace変換型に直すことを考慮してとられたものであることに注意を要する．

(*1)　今村勤：物理と関数論,岩波書店.
(*2)　Lamb,H.: On the propagation of tremors over the surface of an elastic solid, *Phil. Trans. Roy. Soc.* **A,203**,pp.1-42,1904.
(*3)　東平光生: 離散固有値および連続固有値を用いたGreen関数のスペクトル分解表示について, 土木学会論文集 No.577/I-41,245-256 ,1997.10.

キーワード　*Green's function , asymptotic expansin , discrete spectrum , continuous spectrum*
〒278-8510 千葉県野田市山崎2641　Tel 0471-24-1501 (内線 4073)　Fax 0471-23-9766

ここで，(1)式に現れるHankel関数に漸近展開を施し，また，**Fig.2**に示される積分経路Lについて留数定理，並びに，積分変数である波数について適当な変数変換を施すことで，(1)式はLaplace変換型の式に直すことができる．さらにここでWatsonの補助定理を用いると，(1)式は最終的に次のように漸近展開される．

$$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') \underset{r\to\infty}{\approx} -i\sqrt{\frac{1}{2\pi r}}\sum_{n=1}^{N}\sqrt{k_n}e^{-ik_n r}\operatorname*{Res}_{k=k_n}E_k(z,z') - C_l\frac{i\sqrt{k_{\alpha_2}}e^{-ik_{\alpha_2}r}}{4\pi r^2} \quad (l=1,2,3) \cdots (3)$$

（$0\le z\le z'$ の時），

$$C_1=\frac{-2\sqrt{k_{\alpha_2}}\eta_1\sin(\nu z)}{\nu^2\cos^2\nu H}\times \{\ \cos\nu(H-z')\sin\nu H-\cos\nu H\sin\nu(H-z')\ \}$$

（$z'\le z\le H$ の時），

$$C_2=\frac{-2\sqrt{k_{\alpha_2}}\eta_1\sin(\nu z')}{\nu^2\cos^2\nu H}\times \{\ \cos\nu(H-z)\sin\nu H-\cos\nu H\sin\nu(H-z)\ \}$$

（$H\le z$ の時），

$$C_3=\frac{-2\sqrt{k_{\alpha_2}}\eta_1\sin(\nu z')}{\nu^2\cos^2\nu H}\times \{\ \nu(z-H)\cos\nu H+\eta_1\sin\nu H\ \}$$

ここに，$\nu=\sqrt{k_{\alpha_1}-k_{\alpha_2}}$ である．

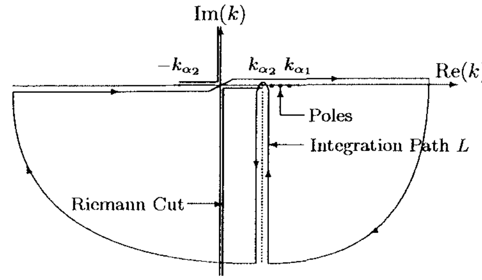

Fig.2 Integration path in the complex k-plane

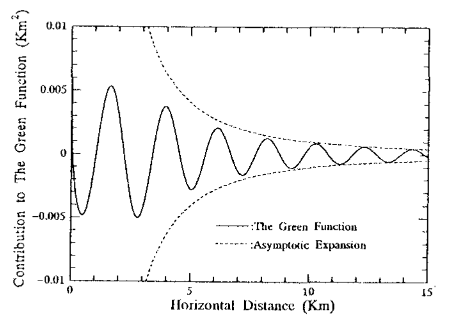

Fig.3 Graph of the Green function concerned with the continuous spectra and its asymptotic expansion (Real Part)

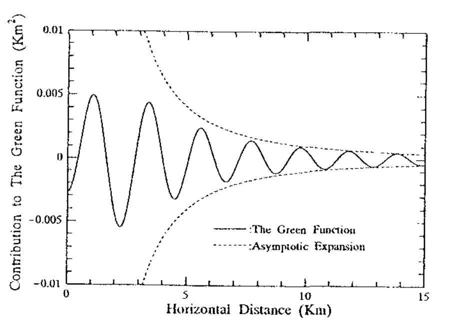

Fig.4 Graph of the Green function concerned with the continuous spectra and its asymptotic expansion (Imaginary Part)

3. 数値計算例

Fig.3,Fig.4 は表層の厚さが1.0Kmの2層の弾性流体モデルについて,Green関数の連続スペクトルに関する部分とその漸近展開の係数部分を,解の実部と虚部の双方について数値計算させたものである．表層での音波速度は1.0Km/s,質量密度は$1.0g/cm^3$,基盤層での音波速度は2.0Km/s,質量密度は$1.0g/cm^3$，点震源の位置は自由表面から深さ0.5Km，観測点の位置は自由表面から深さ3.0Km，振動数は1Hzとした．水平方向距離が大きくなるに従い両者の一致が確かめられ，数値計算の立場からも漸近展開の正しさが伺われる．

4. 結論

本紙面では，成層構造を持つ波動場を表すGreen関数について，水平方向についての漸近展開を行う方法を，具体的な2層構造のスカラー波動場について提示した．これによれば，複素波数平面上において，被積分関数の極とRiemann Cutの分岐点k_{α_2}から無限遠点に向かう線を挟んだ積分経路の一部分とに関連して，Green関数の漸近展開はそれぞれ離散並びに連続スペクトルに関係した部分に分けられる．特に，Riemann Cutの分岐点k_{α_2}から無限遠点に向かう線において，積分経路上の被積分関数は不連続となっており，このことに関連して常に連続スペクトルが現れてくることはGreen関数のスペクトル分解と同じである．(3)式については，留数によって表される離散スペクトル関係した項は表面波に対応しており，$r^{\frac{1}{2}}$で水平方向に減衰する．また，連続スペクトルに関係した項は実体波に対応しており，r^2で水平方向に減衰することが漸近展開により分かる．さらに，水平方向へ伝播してゆくGreen関数の振幅の大きさは，表層では振動数の大きさに関係しておらず，半無限層内では振動数の$\frac{1}{2}$乗で関係してくることが漸近展開したことで明らかとなった．