土木学会第54回年次学術講演会（平成11年9月）

I－B 27　スペクトル分解表現されたGreen関数による散乱波動場の解析と散乱波のスペクトル特性の検討

東京理科大学　正会員　東平光生

1. はじめに

境界積分方程式を用いた散乱波動場の解析はすでに多くなされ，一般的なものとなりつつある．しかし，用いることのできるGreen関数の制約から，たとえば，成層媒質中の散乱体による散乱波の計算などでの境界積分方程式法の実績は，それほど多くない．これまで，著者は成層媒質のGreen関数のスペクトル表現[1]を検討してきた．これによれば，成層媒質の波動場のGreen関数は層数に関わりなく離散と連続スペクトルの固有関数の重ね合わせで表現できる．したがって，これを境界積分方程式法で利用できれば，Green関数のスペクトル分解表現の利用価値は高くなる．以上の観点から本研究は，Green関数のスペクトル分解表現の境界積分方程式への適用の可能性を検討した．

2. Green関数のスペクトル分解表現と境界積分方程式

ここでは簡単のため，2次元成層波動場でSH波を扱う問題を定式化する．限られた紙面の都合上，誘導プロセスを示すことはできないが，この波動場のGreen関数のスペクトル分解表現は次式となる．

$$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = -\frac{i}{2}\sum_{k_n\in\sigma_p}\frac{\varphi_n(y)\varphi_n(y')}{k_n}\exp(ik_n|x-x'|) + \frac{i}{2}\int_{\sigma_c}\frac{\phi_k(y)\phi_k(y')}{|k|}\exp(ik|x-x'|)dk \tag{1}$$

ここに，GはGreen関数，$\boldsymbol{r}=(x,y)$は観測点，$\boldsymbol{r}'=(x',y')$はソース点，k_nは正規モードの波数，σ_pはk_nの集合，すなわち，離散スペクトル，$\varphi_n(y)$はk_nに対応する固有関数，σ_cは連続スペクトル，$\phi_k(y)$は連続スペクトルの固有関数，**Fig.1**に示すk_βは半無限媒質の波数を示す．式(1)の表現と**Fig.1**のスペクトルを採用した場合，Green関数は$\exp(i\omega t)$の時間依存性で進行波の性質を示すようになる．

ここでは，このGreen関数を用いて，剛体の散乱体に平面波が入射した場合の散乱問題を扱ってみる．境界積分方程式は以下のようになる．

$$c(\boldsymbol{r})u(\boldsymbol{r}) = \int_\Gamma G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')s(\boldsymbol{r}')d\Gamma + u_I(\boldsymbol{r}) \tag{2}$$

ここに，$c(\boldsymbol{r})$は境界の形状で定まるfree-termの係数であるが，剛体の散乱体を扱う限り，$\boldsymbol{r}\in\Gamma$の場合ゼロとして良い．また，$\boldsymbol{r}\notin\Gamma$の場合で波動場の領域内の場合には$c=1$とする．ただし，$\Gamma$は散乱体の境界を表す．また，$u$は変位場，$s$は表面力，$u_I$は入射波を表す．

境界積分方程式を扱う上で，Green関数の特異点を含む積分の評価は，解析精度に関わる重要な問題である．ここではGreen関数の特異点近傍の性質が

$$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') \sim \frac{1}{2\pi}\log\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} \tag{3}$$

であることを用い，特異点を除去して数値積分を行い，これに対数関数の解析的積分を加えることで問題を解決する．

なお，Green関数のスペクトル分解表現に現れる，離散スペクトルの和と連続スペクトル波数積分を境界積分と順序の交換を行うと，散乱波は次のスペクトル表現を有することになる．

$$\begin{aligned} u_s(\boldsymbol{r}) \;=\; & -\frac{i}{2}\sum_{k_n\in\sigma_p}\varphi_n(y)\left[\int_\Gamma\frac{\varphi_n(y')}{k_n}\exp(ik_n|x-x'|)s(\boldsymbol{r}')d\Gamma\right] \\ & +\frac{i}{2}\int_{\sigma_c}\phi_k(y)\left[\int_\Gamma\frac{\phi_k(y')}{|k|}\exp(ik|x-x'|)s(\boldsymbol{r}')d\Gamma\right]dk \end{aligned} \tag{4}$$

ここに，u_sは散乱波を表す．離散スペクトルの和は有限和であるから，順序の交換は大きな問題ではない．また，連続スペクトルの積分と境界積分の順序の交換はFubiniの定理に基づく．このとき，$x\neq x'$が要求されるから，散乱波のスペクトル表現は，観測点が散乱体から離れた場所で可能となることが示される．いずれにせよ，式(4)はGreen関数のスペクトル分解表現によって，散乱波のスペクトルが容易に求められることが示される．

---

key words: Green's function, spectral theory, layered medium, scattering waves
〒278-8510　野田市山崎 2641　東京理科大学土木工学科 Phone:0471-24-1501　Fax:0471-23-9766

3. 数値計算例

ここでは，簡単のため半無限均質波動場に埋め込まれた，円形の剛体による平面波の散乱の問題を扱う．解析モデルを**Fig. 2**に示す．図中のdは円の直径を示す．また平面波の剛体への入射角は45° としている．剛体の中心のx座標はゼロとし，地表面の観測点AおよびBのx座標を$-1.5d$, $1.5d$としている．半無限均質波動場であるから，離散スペクトルは存在せず，連続スペクトルだけでGreen関数が表現できることに注意する．

まず，スペクトル表現されたGreen関数を用いた境界積分方程式法による結果と，通常用いられるGreen関数（ここではHankel関数，ただし鏡像解を加えている）による結果の比較を地表面の変位振幅に着目して行ってみる．比較の結果を**Fig. 3**に示すが，両者は極めて良い一致を示しており，スペクトル分解表現によるGreen関数の実用性が示されている．

次に，式(4)を用いて，Point AならびにPoint Bの散乱波のスペクトルを計算した結果をFig. 4に示す．この図より明らかなように，散乱波のスペクトルは，無次元の波数$k=1$で鋭いピークが現れている．この波数は媒質の波数に他ならず，散乱波は主に水平方向に媒質の波動の位相速度で伝播することを示している．これは半無限媒質のGreen関数のスペクトル分解表現からも明らかになることであり，表層媒質を持たない散乱場の著しい特徴である．

4. 結論

本研究では，スペクトル分解表示されたGreen関数の境界積分方程式への適用可能性を検討した．これによれば，スペクトル分解表示されたGreen関数でも十分な精度で境界積分方程式に適用できることが示され，多層媒質中での散乱問題の解析への展望が得られた．またスペクトル分解されたGreen関数によって，散乱波そのものも容易にスペクトル分解することが可能となる．これによって，入射波と散乱波の波数カップリングの様相が明確になることも期待できる．

参考文献
1) 東平光生: スカラー成層波動場のGreen関数のスペクトル測度を用いた表現，応用力学論文集, Vol.1, pp.585-594, 1998

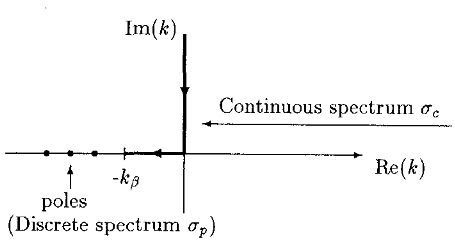

Fig. 1 Discrete and continuous spectra for the wave field in the complex wavenumber plane.

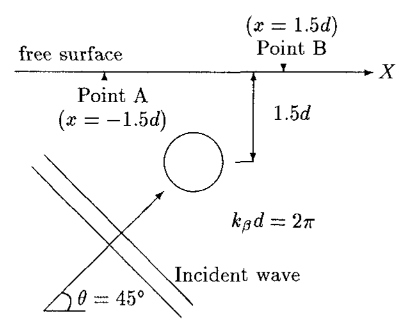

Fig. 2 Analyzed model.

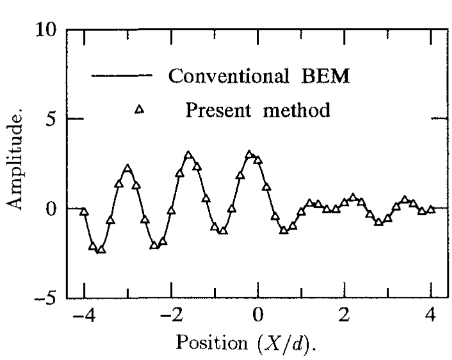

Fig. 3 Comparison of the surface amplitude.

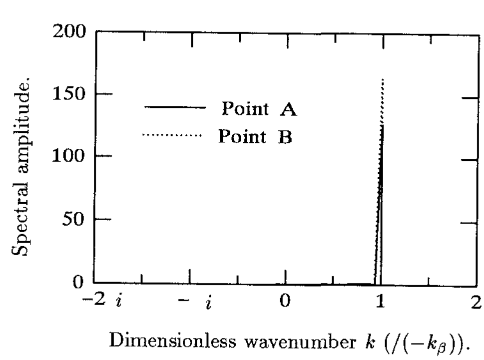

Fig. 4 Comparison of the wavenumber spectra for the scattering waves.