

I-A124

非圧縮 Navier-Stokes 方程式に対する最適形状問題

中央大学大学院 学員 奥村 弘
中央大学 正員 川原 睦人

1 はじめに

本研究の目的は非圧縮 Navier-Stokes 方程式によって支配される流れ場において最適形状問題を変分問題に帰着される最適制御理論を用いて定式化を行い、その解法を示す。この最適化問題は様々な工学的問題に有効である。物体周りの非定常流れを今回の研究ではターゲットとする。ここでは、もとの物体の形状の変形量を最小限にとどめ、物体にかかる流体力を最小にすることを本研究の目的とする。

最適制御理論において、評価関数は対象とする物体の形状の変形量を最小にかつ、流体力を最小に見積もるように設定される。もし、評価関数を最小にする形状が求まれば、形状の最適化が達成されたことになる。最適形状問題は、新しい制御パラメータつまり評価関数を最小にする物体の形状の位置を求めることである。評価関数は状態量と制御量の関数によって表される汎関数として表現できる。一般的に状態量は状態方程式として偏微分方程式によって表される。状態方程式は評価関数の拘束条件の役割を果たすことになる。ここでの状態方程式は非圧縮 Navier-Stokes 方程式である。Lagrange 乗数法をこの評価関数の拘束条件に適用することにより、Lagrange 乗数方程式が得られる。この方程式は直接モデルの線形化された随伴オペレーターと等価となる。

随伴方程式は時間に依存し逆時間に解く必要があり、横断性(transversality)の条件と呼ばれる終端条件がこの初期条件として与えられる。これは制御量に関する評価関数の勾配として導かれ、このことは評価関数の最小化の手法として最も有効な手法^[1]である。

2 基礎方程式

$\Gamma = \partial\Omega$ を境界とする 2次元空間領域 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ と時間領域 $I = [T_0, T_f]$ を定義し、領域 $\Omega \times I$ で非圧縮粘性流体で満たされているものとする。非圧縮粘性流れの基礎方程式は、非圧縮 Navier-Stokes 方程式であり、無次元化された非圧縮 Navier-Stokes 方程式における運動方程式と連続式は、以下のように表される。

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \nabla p - \nu \nabla^2 \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{in } \Omega \times I \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad \text{in } \Omega \times I \quad (2)$$

Keywords: 最適形状問題、最適制御理論、有限要素法
非圧縮 Navier-Stokes 方程式、安定化気泡関数要素
中央大学大学院理工学研究科

(〒112-8551 東京都文京区春日 1-13-27, TEL: 03-3817-1814)
e-mail to: oku@kc.chuo-u.ac.jp

ここで、 $\mathbf{u}$ は流速ベクトル、 p は圧力、 $\mathbf{f}$ は外力項ベクトル、 ν は $1/Re$ 、 Re は Reynolds 数をそれぞれ表す。

断面を B をする物体周りの外部流れの例(図-1)を考える。境界 Γ は、 $\Gamma = \Gamma_U \cup \Gamma_D \cup \Gamma_S \cup \Gamma_B$ に分けられる。また、物体領域 B の境界 Γ_B には、流体力を制御するために物体 B の形状を最適に変形し得る境界 $\gamma \subset \Gamma_B$ があるものとする。この問題における境界条件と初期条件は、以下のように与えられる。

$$\mathbf{u} = (U, 0) \quad \text{on } \Gamma_U \times I \quad (3)$$

$$\mathbf{t} = \{-p\mathbf{E} + \nu \nabla \mathbf{u}\} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0} \quad \text{on } \Gamma_D \times I \quad (4)$$

$$t_1 = 0, u_2 = 0 \quad \text{on } \Gamma_S \times I \quad (5)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{on } \Gamma_B \cup \gamma \times I \quad (6)$$

$$\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0 \quad (\text{with } \nabla \cdot \mathbf{u}_0 = 0) \quad \text{in } \Omega \quad (7)$$

ここで、 U は一定の流入流速、 $\mathbf{E}$ は単位テンソルである。

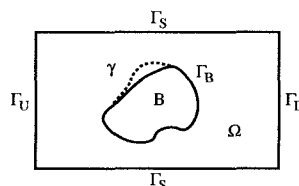


図-1 解析領域と境界条件

物体 B に作用する流体力を (D, L) と定義する。ここで、 D は抗力であり、 L は揚力である。流体力 (D, L) は、物体 B の境界 Γ_B の応力を積分することによって以下の式のより得られる。

$$(D, L) = - \int_{\Gamma_B} \mathbf{t} \, d\Gamma \quad (8)$$

3 最適形状問題の定式化

基礎方程式を満足しながら評価関数を最小にする拘束条件付きの最適化問題では、基礎方程式の状態変数に対する随伴変数を用いる Lagrange 乗数法(随伴方程式法)によって拘束条件無しの最小化問題に変換することが出来る。本研究で用いる最適形状問題の定式化には、Abergall and Temam^[2]による基礎方程式を離散化せずに随伴方程式を導く方法を適用する。本手法の最適形状問題は最適制御理論に基づいており、制御を目的とする評価関数を定義し、評価関数の最小化問題に帰着される。本研究で用いる評価関数は、以下のように定義する。

$$J(\eta) = \frac{1}{2} \int_{T_0}^{T_f} (q_1 D^2 + q_2 L^2) dt + \frac{1}{2} \int_{T_0}^{T_f} \int_{\gamma} \eta^2 \, d\Gamma \, dt \quad (9)$$

ここで、 η は形状の変形量ベクトルであり制御量に相当する量である。 (q_1, q_2) は流体力 (D, L) に対応する重みであり、 r は制御量 η に対する重みである。流体力は、非圧縮 Navier-Stokes 方程式により求まるので、式 (1) と式 (2) が評価関数 (9) の拘束条件となる。

非圧縮 Navier-Stokes 方程式 (1), (2) の状態変数である u と p に関する随伴変数を随伴流速 y と随伴圧力 λ として定義すれば、拘束条件無しの最小化問題に変換された次の拡張評価関数が得られる。

$$J^*(\eta) = \frac{1}{2} \int_{T_0}^{T_f} (q_1 D^2 + q_2 L^2) dt + \frac{1}{2} \int_{T_0}^{T_f} \int_{\gamma} r \eta^2 d\Gamma dt - \int_{T_0}^{T_f} \int_{\Omega} y \cdot \left\{ \frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \nabla u + \nabla p - \nu \nabla^2 u \right\} d\Omega dt + \int_{T_0}^{T_f} \int_{\Omega} \lambda \nabla \cdot u d\Omega dt \quad (10)$$

評価関数 (9) を最小化するための最適 (停留) 条件は、拡張評価関数 (10) の第一変分をゼロとすることによって導かれる。

$$\delta J^*(\eta) = 0 \quad (11)$$

最適条件は、式 (11) の各変数 u, p, y, λ, η の変分のかげられている各項をゼロにすることによってえられ、このことにより、随伴方程式が以下のように得られる。

$$-\frac{\partial y}{\partial t} + (\nabla u)^T y - u \cdot \nabla y + \nabla \lambda - \nu \nabla^2 y = 0 \quad \text{in } \Omega \times I \quad (12)$$

$$\nabla \cdot y = 0 \quad \text{in } \Omega \times I \quad (13)$$

また随伴方程式の境界および終端条件は以下になる。

$$y = 0 \quad \text{on } \Gamma_U \times I \quad (14)$$

$$s = 0 \quad \text{on } \Gamma_D \times I \quad (15)$$

$$s_1 = 0, y_2 = 0 \quad \text{on } \Gamma_S \times I \quad (16)$$

$$y = (q_1 D, q_2 L) \quad \text{on } \Gamma_B \times I \quad (17)$$

$$y(x, T_f) = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (18)$$

評価関数 $J(\eta)$ の制御変形量 η に関する勾配は、基礎方程式と随伴方程式を解いたものから、次の式により計算できる。

$$\delta \eta \frac{\partial J(\eta)}{\partial \eta} = \int_{T_0}^{T_f} \int_{\gamma} \delta \eta \cdot (s - r \eta) d\Gamma dt \quad (19)$$

制御変形量 η が最適解であれば、以下の等式を満たす。

$$s - r \eta = 0 \quad \text{on } \gamma \times I \quad (20)$$

ここで、 s は以下の式により定義したものである。

$$s = \{u y - \lambda E + \nu \nabla y\} \cdot n \quad (21)$$

4 数値解析手法および数値解析例

時間方向の離散化には、安定性に優れ時間増分を大きくとれる陰的解法を適用する。空間方向の離散化手法には安定化気泡関数要素^[3]を用いた有限要素法を適用する。安定

化気泡関数要素を用いた手法^[4]は、散逸誤差が非常に少なく、安定性および計算効率に優れている。また、安定化気泡関数要素を用いた手法は、安定化有限要素法の一つである SUPG 法とある種の問題において等価^{[3],[5]}となる。また、随伴方程式の離散化についても同手法を適用しこれを逆時間について解く。

評価関数の最小化手法には Nevon らによって提案された Limited-memory quasi-Newton (LMQN) 法^[6]を適用する。LMQN 法は、ヘッシアン行列の逆行列に疎行列近似を行える Limited memory BFGS (L-BFGS) 公式を用いており、計算容量を削減できるため、大規模な最小化問題の解析に適している。

以下に重みを $q_1 = 0.5, q_2 = 0.0, r = 1.0$ として、流体力 (抗力 D) を制御した場合の数値解析例を示す。ターゲットとする物体の初期形状は円形として最適化を行った。図-2 より最適化後の形状は翼形になっていることが分かる。また、図-3 に示すように時刻歴の流体力が適切に制御されていることが分かる。

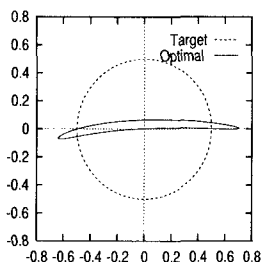


図-2 初期形状 (Target) と最適化 (Optimal) 後の形状

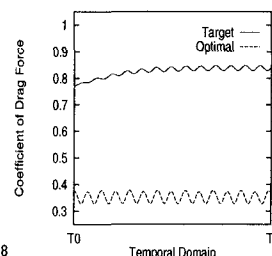


図-3 流体力 D の時刻歴の比較図

5 おわりに

本論文では、非圧縮 Navier-Stokes 方程式によって支配される流れ場において最適形状問題を最適制御理論を用いて定式化し、その解法を示した。

参考文献

- [1] A. Maruoka, M. Marin and M. Kawahara, "Optimal Control in Navier-Stokes Equations", *IJCFD*, Vol.9, pp.313-322, (1998).
- [2] Abergel, F., and Temam, R., "On Some Control Problems in Fluids Mechanics", *Theoret. Comput. Fluid Dynamics*, Vol. 1, pp. 303-325, (1990).
- [3] 奥村, 松本, 川原, "Petrov-Galerkin 有限要素法と安定化気泡関数要素", 第4回日本計算工学会講演会論文集 (掲載予定), (1999).
- [4] 奥村, 川原, "安定化気泡関数要素を用いた非圧縮 Navier-Stokes 方程式における分離型有限要素法", 流れ解析研究会第5回例会資料, 財団法人日本科学技術連盟, (1999).
- [5] 山田, "安定化有限要素法と気泡関数要素", 日本計算工学会講演会論文集, Vol.1, pp.167-170, (1996).
- [6] Zou, X., Navon, I. M., Berger, M., and Phua, K. H., "Numerical Experience with Limited-Memory Quasi-Newton and Truncated Newton Methods", *Siam J. Optimization*, Vol.3, pp.582-608, (1993).