Ⅰ－A94 非圧縮性流れの安定化有限要素法のための連立方程式の解法についての一考察

北見工業大学　学生員　加藤 修
八戸工業高等専門学校　正　員　丸岡 晃

1. はじめに

非圧縮性流れにおける安定化有限要素法は、数値流体解析において Galerkin 法を適用した場合に問題となる不安定性を解消する手法であり、精度面でも優れているため、近年注目されている。しかしながら離散化の過程において非線形の連立方程式が導かれるため、いかに効率的に解くかが問題となる。そこで本研究では、安定化手法には離散化に Semi-Discrete 法を用い、連立方程式の解法には大規模な問題への対応が可能な Matrix-free 法に基づく GMRES 法を適用し、反復数と精度の関係を、三角形一次要素を用いた物体まわりの流れ解析を取り上げ主な検討を行なった。

2. 解析手法

支配方程式は、非圧縮性流れの Navier-Stokes 方程式で、運動方程式と非圧縮性の連続式より、以下のように表される。

$$\rho\left\{\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}+\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u}-\mathbf{f}\right\}+\nabla p-\mu\nabla^2\mathbf{u}=0 \quad \text{in} \quad \Omega \tag{1}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{u}=0 \quad \text{in} \quad \Omega \tag{2}$$

ここで、ρ は一定の密度、$\mathbf{u}$ は流速、$\mathbf{f}$ は外力、p は圧力、μ は一定の粘性係数を示す。

式(1)、(2)を安定化有限要素法[1]により離散化する。本手法は標準的な Galerkin 法で構成される項と、厳密解によって消去される運動方程式と連続式の残差に重み付けられる安定化項により構成される。安定化有限要素法の場合、時間方向にも有限要素法を用いる space-time 法[1]が適用されることが多いが、本研究では時間積分に差分近似を行なう Semi-discrete 法[2]を用いる。

安定化有限要素法および時間方向の離散化により、以下に示す非線形の連立方程式が導かれる。

$$\mathbf{N}(\mathbf{d}_{n+1})=\mathbf{F} \tag{3}$$

ここで、$\mathbf{d}_{n+1}$ は時刻 $n+1$ に対応する流速と圧力の節点量である。式(3)は Newton-Raphson(NR)法を適用すると、$\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ というような線形の連立方程式に置き換えられ、NR 法の反復ごとに解くことになる。ここで行列 $\mathbf{A}$ は大規模な非対称行列になる。

反復法の計算では行列-ベクトル積 $\mathbf{Ax}$ の計算が必要とされる。element-by-element 法を用いると、要素ごとの行列 $\mathbf{A}^e$ を計算し、要素ごとのベクトル $\mathbf{x}^e$ との積を全体系に重ね合せることにより、全体系の行列 $\mathbf{A}$ の記憶を必要としない。

Matrix-free 法では反復法の内部における要素ごとの行列-ベクトル積 $\mathbf{A}^e\mathbf{x}^e$ の重ね合せを行なっているループ内で要素ごとの行列 $\mathbf{A}^e$ を作成する。これにより、要素ごとの行列さえも記憶する必要がなくなり、より大規模な問題への対応が可能となる。

本研究では反復法に Matrix-Free 法に基づく GMRES 法[1]を適用する。GMRES 法は、Kryrov ベクトルを求める Inner ループとリスタートのための Outer ループにより構成される。

本手法では、NR 法により式(3)の非線形の連立方程式に対する収束を必要とするため、NR 法の反復と内部の GMRES 法の反復をバランスさせて全体の収束を得る必要がある。

3. 数値解析例

(1) 解析条件

本研究では、NR 法の各反復ごとにおける GMRES 法の Inner と Outer の反復数の設定について表-1のように設定し、図-1に示す辺長比 1 の二次元角柱まわりの流れを取り上げ、検討を行なう。なお、NR 法の計算、5 ステップごとに GMRES 法の反復数を変化させたもの(ケース 7)についての検討も行なう。要素分割は三角形一次要素を用い、総節点数 20360、総要素数 40064 である。Reynolds 数は 250、1000 とする。時間増分は 0.05 とする。なお、本研究では NR 法、GMRES 法に対する収束判定基準は用いず、所定回繰り返した後、次のステップの計算を進めた。

Key Word：非圧縮性流れ、安定化有限要素法、Newton-Raphson 法、Matrix-Free 法、GMRES 法
連絡先：〒090-0015 北海道北見市公園町 137-11　第二パークハイツ 106 号　Tel：090-2793-9365

(2) 解析結果

図-2、図-3、図-4はNR法の反復による残差ノルムの基準値($\|r_k\|/\|r_0\|$)の収束を表したもので、十分に発達した流れを初期条件とし、100回の平均を求めたものである。

Re=250の場合、図-2よりGMRES法の計算回数により、それぞれNR法の収束には限界を持っていることがわかる。また、GMRES法の計算回数は、多く行なうほど効果的でOuterで計算するよりInnerで計算を行なったほうがより効果的で、図では約$10^{-3.6}$まで収束している。なお、GMRERS Inner回数が80のとき、約10^{-4}まで収束した。Re=1000の場合、図-3よりGMRES法の計算回数を増やしても必ずしも高い効果が得られない場合があることが分かる。また、Reynolds数が低いときと比べて収束が悪く、約$10^{-3.2}$までしか収束していない。なお、ケース6に関しては一向に収束しなかった。これは、渦が境界に達したため、時間によって計算が収束していないのが原因であると思われる。

図-4上段に示す数字は、Re=250におけるケース7のGMRES Inner-Outer回数である。その結果、効率的に収束している。しかし、NR法の反復数が少ない場合、あまり良く収束しなかった。

4. おわりに

本研究は、非圧縮性流れのための安定化有限要素法について、物体まわりの流れを取り上げ主な検討を行なった。以下に本研究の結果をまとめる。

NR法の反復計算による収束は、Reynolds数などの計算条件に依存する有限な精度を持っており、必ずしも内部の反復数を多くすれば良いというわけではない。

NR法およびGMRES法の収束は、平均を取った場合ほぼ一定値として見ることができるが、時間によって変化するため、収束判定条件を固定するのは難しい。

GMRES法内部の反復数を多くすることによって、計算の精度が向上することは確認できたが、GMRES Inner回数に比例して記憶容量も増えるため、本手法は大規模な計算を精度良く解析するにはあまり向かないといえる。

参考文献

[1]M.Behr and T.E.Tezduyar , "Finite element solution strategies for large-scale flow simulations" , *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* , 112 , 3-24 (1994)

[2]V.Kalro and T.E.Tezduyar , " Parallel finite element computation of 3D incompressible flow on MPPs " , in W.G.Habashi , editor , *Solution Techniques for Large-Scale CFD problems* , 59-81 , John Wiley & Sons , (1995)

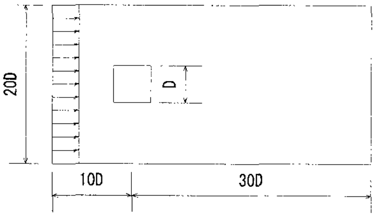

図-1 解析領域

表-1 GMRES及びNRの反復数

	NR	GMRES		Total
		Inner	Outer	
ケース1	48	10	1	480
ケース2	48	10	2	960
ケース3	48	10	4	1920
ケース4	48	20	1	960
ケース5	48	20	2	1920
ケース6	48	40	1	1920

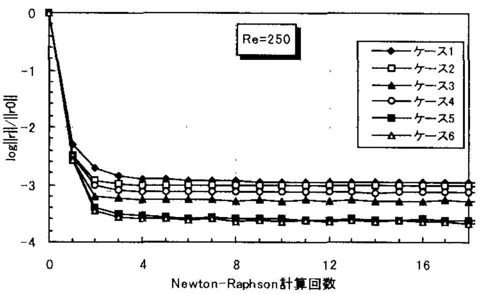

図-2 解の収束状況

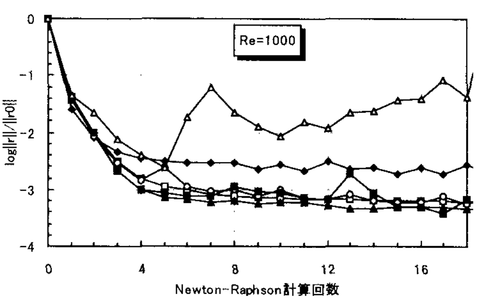

図-3 解の収束状況

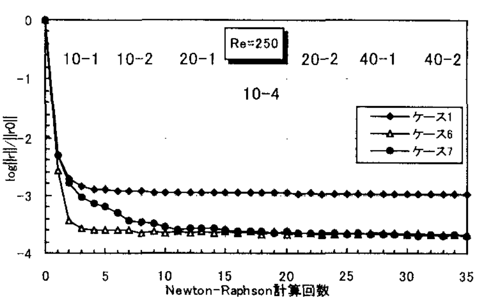

図-4 解の収束状況