

I-A93

セルオートマトン法を用いた弾性体の変形の計算手法

東洋大学工学部 正員 吉野 隆

1. はじめに

弾性体の変形や破壊の数値シミュレーションは、物理学や地球科学そして構造工学など、さまざまな分野で考えられてきた重要な課題である。現在、有効と考えられている方法としては、個別要素法、有限要素法そして境界要素法などが挙げられる。これらは、それぞれが得意な分野において、たくさんの成果を挙げている。しかし、すべてのシミュレーションがこれらの方法で十分であるかという点、そうではない。本研究では、これまでの手法の問題点を解決し得る可能性をもつ新しい手法として、「バネブロック系によるセルオートマトン的な計算方法」を提案し、その方法の予備的な考察を行う。

2. 手法

本研究で考察したバネブロック系と連続体の関係の模式図を図1に示す。弾性体を有限の幅(Δx)で切り分け、その結果として生じる x 方向に i 番目、 y 方向に j 番目の領域を (i, j) と呼ぶ。このときに分割される数は x 方向に N_x 個、 y 方向に N_y 個とする。領域 (i, j) を代表する位置 $((i+1/2)\Delta x, (j+1/2)\Delta x)$ に微小体積の質量 $m_{i,j}$ を集中させる。この質点をブロック(もしくはビーズ)と呼ぶ。ブロックの位置の変化がその領域を代表する点の変位を表している。この変位を $u_{i,j}$ とおく。図中で、小さい正方形で囲まれた部分が、ひとつのバネとブロックの組に相当する領域である。

図2にシステムにおける変数の関係を示す。横方向および縦方向に連結されているバネの伸びを表すベクトルを、それぞれ $h_{i,j}$ および $v_{i,j}$ とおく。

$$h_{i,j} = u_{i,j} - u_{i-1,j} \dots\dots\dots (1)$$

$$v_{i,j} = u_{i,j} - u_{i,j-1} \dots\dots\dots (2)$$

バネブロック系によるセルオートマトン的な計算手法を構築するために、弾性体の基礎方程式の差分表現を導出し、それをバネブロック系の言葉で表現することを考える。もとの式は

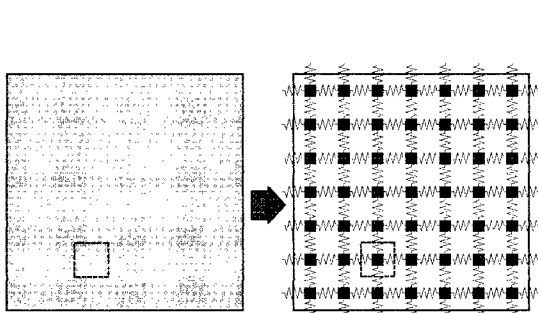


図1 連続体とバネブロック系の対応関係

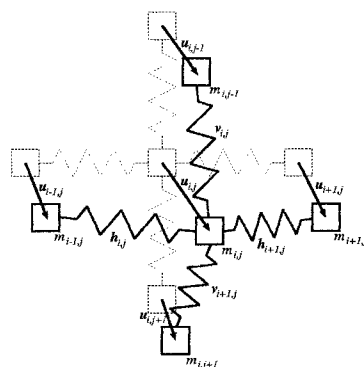


図2 バネブロック系における変数の関係

キーワード：セルオートマトン，弾性体

〒 350-8585 埼玉県川越市鯨井 2100 TEL 0492-39-1396 FAX 0492-31-4482

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \text{grad div} \mathbf{u} + \mu \text{div grad} \mathbf{u} + \mathbf{K} \quad (3)$$

ここで ρ は密度、 λ と μ はラメの定数、 $\mathbf{u}$ は変位、 $\mathbf{K}$ は体積力などの外力を総合したものである。この式を空間について差分表示したものを $\mathbf{h}_{i,j}$ および $\mathbf{v}_{i,j}$ で表すと、最終的に

$$m_{i,j} \frac{\partial^2 h_{i,j}^x}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu)(h_{i+1,j}^x - 2h_{i,j}^x + h_{i-1,j}^x) + \mu(h_{i,j+1}^x - h_{i,j}^x) \\ + (\lambda + \mu)(v_{i+1,j+1}^y + v_{i+1,j}^y - v_{i-1,j+1}^y - v_{i-1,j}^y + v_{i,j+1}^y + v_{i,j}^y - v_{i-2,j+1}^y - v_{i-2,j}^y) \cdots (4)$$

$$m_{i,j} \frac{\partial^2 v_{i,j}^y}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu)(v_{i,j+1}^y - 2v_{i,j}^y + v_{i,j-1}^y) + \mu(v_{i+1,j}^x - v_{i,j}^x) \\ + (\lambda + \mu)(h_{i+1,j+1}^x + h_{i,j+1}^x - h_{i+1,j-1}^x - h_{i,j-1}^x + h_{i+1,j}^x + h_{i,j}^x - h_{i+1,j-2}^x - h_{i,j-2}^x) \cdots (5)$$

が導かれる（ただし外力は無視した）。添字の x と y は、同一の名前をもつベクトル変数の成分を示している。同様の式が $h_{i,j}^y$ や $v_{i,j}^x$ についても成り立つが、実際には使用しない。この式を時間について差分をとり $h_{i,j}^x$ と $v_{i,j}^y$ を更新させてゆくことにより弾性体の変形の経時変化を計算することができる。

以下ではつりあい状態のみを求めることを考える。すなわち、最終的に到達する形状のみに注目する。これは $\partial^2 h_{i,j}^x / \partial t^2 = 0$ および $\partial^2 v_{i,j}^y / \partial t^2 = 0$ を解くことによって得られる。今回用いたのは、上記の式の右辺を $\mathbf{g}[\mathbf{h}_{i,j}, \mathbf{v}_{i,j}]$ とおき、バネののび（ $\mathbf{h}_{i,j}$ および $\mathbf{v}_{i,j}$ を $\mathbf{g}[\mathbf{h}_{i,j}, \mathbf{v}_{i,j}]$ の α 倍分だけ増加させてゆくことによって、つりあいの位置を求める方法である。すなわち、一回の計算ごとに、 $\mathbf{h}_{i,j} \rightarrow \mathbf{h}_{i,j} + \alpha \mathbf{g}[\mathbf{h}_{i,j}, \mathbf{v}_{i,j}]$ を計算して系を発展させてゆくことで $\mathbf{g}[\mathbf{h}_{i,j}, \mathbf{v}_{i,j}]$ をゼロに近づける。これを繰り返して、最終的には、すべての点 (i, j) において、 $\mathbf{g}[\mathbf{h}_{i,j}, \mathbf{v}_{i,j}] = 0$ となる $\mathbf{g}[\mathbf{h}_{i,j}, \mathbf{v}_{i,j}]$ に到達させる。実際の数値計算では完全にゼロとなることは稀なので、 $\mathbf{g}[\mathbf{h}_{i,j}, \mathbf{v}_{i,j}] \simeq 0$ が成立すること、すなわち、 $\mathbf{g}[\mathbf{h}_{i,j}, \mathbf{v}_{i,j}]$ が無視できる位まで十分に小さくすることが目標となる。

3. 結果と結論

以下では変形のシミュレーションの最終的な結果のみを示す。本研究では、正方形の供試体について、圧縮力を加えた状態を計算した。図3は計算開始前の初期状態を表している。白丸がブロックに相当している。結果は、 21×21 のブロックで構成されている。最上面にある各ブロックに同一の大きさをもつ力を外力として作用させ、最底面の一行は固定している。最上面の各ブロックに鉛直方向の力を加えた時の計算結果を図4に示す。正方形は計算前の形状を表している。圧縮による横方向への膨らみが再現できることがわかる。

本研究で考察したモデルは弾性体の変形を定性的に表現し得ることが解った。本来の目的は、このモデルの破壊問題への拡張にある。破壊のシミュレーションにおける問題点については、今後の研究で検討してゆきたい。

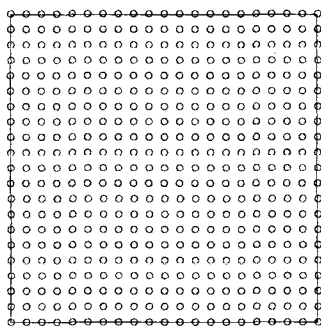


図3 初期状態

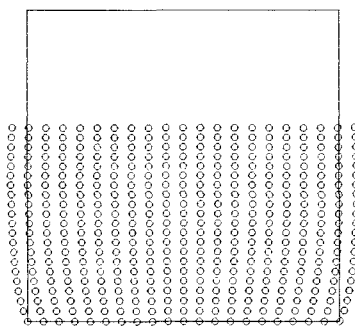


図4 計算結果