

I - A90

Wavelet 積分方程式を用いたクラック問題の高速解法

京都大学大学院 学生会員 ○吉川仁
 京都大学工学研究科 正会員 西村直志
 京都大学工学研究科 フェロー 小林昭一

1 序論

積分方程式法においては、係数行列が密であるため超大規模問題の解析が困難であった。ところが、離散化の際の基底関数として Wavelet 基底を用いると、Wavelet の持つコンパクトサポート、 n 次までの関数との内積が 0 (n 次 Wavelet) という性質により、積分方程式を離散化した係数行列の多くの成分が小さくなり、これを 0 と置き換えることが出来る。この様にして係数行列を圧縮し sparse 化することにより計算時間の短縮を試みる事が行われてきている [2]。しかし、このような手法をクラック問題に用いるためには、クラックの縁の存在により、特別な工夫が必要となる。そこで、本報では、Laplace 方程式に支配されるクラック問題を取り上げ、必要な Wavelet を構成し、その数値的特性を調べる。また、代数方程式の解法としては行列を直接解かず、反復法の GMRES 法を用いる。

2 境界積分方程式の定式化

無限領域 D にクラック S が存在しているとする。クラック問題の境界値問題を次のように設定する。

$$\Delta u = 0 \text{ in } D \setminus S, \quad \frac{\partial u^\pm}{\partial n} = 0 \text{ on } S, \quad u(\mathbf{x}) \rightarrow u^\infty(\mathbf{x}) \text{ as } |\mathbf{x}| \rightarrow \infty, \quad \varphi = 0 \text{ on } \partial S \quad (1)$$

ここで、 $+$ ($-$) はクラックの単位法線ベクトル $\mathbf{n}$ の正 (負) からの極限值、 φ はクラックの開口変位: $u^+ - u^-$ である。式 (1) に対応する Green 公式を書き下し、基本解 G を代入すると、クラック問題の解は次のように表示される。

$$u = u^\infty + \int_S \frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}} \varphi \quad (2)$$

source 点 $\mathbf{x}$ をクラックの境界上に近付ける極限操作を行なうと、クラック問題の境界積分方程式、

$$\frac{\partial u^\infty}{\partial \mathbf{n}_\mathbf{x}}(\mathbf{x}) = -\text{p.f.} \int_S \frac{\partial^2 G(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}_\mathbf{x} \partial \mathbf{n}_\mathbf{y}} \varphi(\mathbf{y}) \quad (3)$$

が得られる。ここに、p.f. は発散積分の有限部分である。

接線方向の直交単位ベクトルを $\mathbf{s}^1, \mathbf{s}^2$ とすると、次の関係がある。

$$\frac{\partial^2 G(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}_\mathbf{x} \partial \mathbf{n}_\mathbf{y}} = - \sum_{\alpha=1}^2 \frac{\partial^2 G(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial s_\mathbf{x}^\alpha \partial s_\mathbf{y}^\alpha} \quad (4)$$

また条件 $\psi(\mathbf{x}) = 0$ on ∂S を満たす S 上の任意関数 $\psi(\mathbf{x})$ を式 (3) の両辺にかけて積分し、式 (4) を用いると、次の変分方程式が得られる。

$$\int_S \frac{\partial u^\infty}{\partial \mathbf{n}} \psi(\mathbf{x}) = \sum_{\alpha=1}^2 \int_S \frac{\partial \psi(\mathbf{x})}{\partial s_\mathbf{x}^\alpha} \int_S G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \frac{\partial \phi(\mathbf{y})}{\partial s_\mathbf{y}^\alpha} \quad (5)$$

3 Wavelet

スケーリング関数として 2 階のスプライン関数

$$\phi(x) = 1 - \frac{|x|}{2} \text{ (if } |x| \leq 2), \quad 0 \text{ (otherwise)} \quad (6)$$

を用いた時、Wavelet は

$$\psi(x) = -1 - \frac{8}{5}|x| \text{ (} |x| \leq 1), \quad -\frac{13}{10} - \frac{7}{10}|x| \text{ (} 1 < |x| \leq 2), \quad -\frac{3}{10} - \frac{1}{10}|x| \text{ (} 2 < |x| \leq 3), \quad 0 \text{ (otherwise)} \quad (7)$$

のように構成できる。ここで次式に注意する。

$$\int \phi(x)\psi(x)dx = 0 \quad (8)$$

本報で取り扱うクラック問題は、有限区間で Wavelet を考える必要がある。有限区間の Wavelet は、いわゆる境界 Wavelet を用いて求めることができるが [1]、クラックの問題では、さらにクラック両端での開口変位は 0 という条件を満たす必要がある。その様な Wavelet を導入する事は困難であるので、次の様に疑似境界 Wavelet を定義する。

$$\psi_b(x) = \frac{1}{2}x(0 \leq x < 1), -\frac{3}{2}x + 2(1 \leq x < 2), \frac{3}{2}x - 4(2 \leq x < 3), -\frac{1}{2}x + 2(3 \leq x < 4), 0(\text{otherwise}) \quad (9)$$

なお、3 次元クラックの解析においては、 x_1 軸上、 x_2 軸上に分布するスケーリング関数と Wavelet のテンソル積を基底関数として用いる。

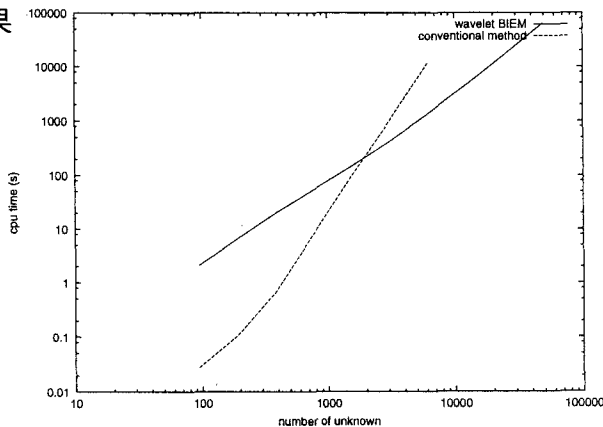
4 Wavelet 基底を用いた高速解法

クラック問題の境界積分方程式をガラーキン法を用いて離散化する。その際の基底関数として、前章で述べた Wavelet を用いる。Wavelet 基底を用いた事により代数方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ の係数行列 A の多くの成分が対角項の値に比べ非常に小さなものとなる。それゆえ、実際に代数方程式を解くにあたり、その値を 0 と置き換えても十分に精度の良い解が得られる。そこでテスト関数の Wavelet 基底のサポートと試行関数の Wavelet 基底のサポートの距離が基準値よりも離れていた場合、対応する係数行列成分を 0 と置き換える。即ち、

$$\tilde{A}_{jj'} := \begin{cases} A_{jj'} & \text{if } \text{dist}(S_j, S_{j'}) \leq \delta_{l,l'} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

ここで、 j, j', l, l' はテスト関数、試行関数の Wavelet ナンバーとそのレベル。 S_j は j 番目の Wavelet のもつサポート、 $\text{dist}(' ', '')$ はサポート間の距離である。また、基準値 $\delta_{l,l'}$ には、Wavelet のレベル等をパラメータとする A. Rethsfeld ら [2] による値を用いる。このようにして、計算すべき行列成分の個数を減らし、繰り返し解法の GMRES 法を用いることで、未知数の大きな問題を高速で解くことができる。

5 結果



2 次元クラック問題についての解析結果を図 1 に示す。この場合未知数が約 1100 以降で Wavelet 基底を用いた方法が従来法よりも高速で解くことができた。なお 3 次元クラック問題については当日述べる事とする。

図 1

参考文献

- [1] チャールズ K. チュウイ (桜井 明・新井 勉 訳): ウェーブレット応用, 東京電気大学出版局, 1997
- [2] A. Rathsfield: A wavelet algorithm for the boundary element solution of a geodetic boundary value problem, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 157(1998)267-287