土木学会第54回年次学術講演会（平成11年9月）

I－A89　多重極 Galerkin 積分方程式法の3次元静弾性クラック問題への適用

京都大学大学院　学生会員　○吉田研一
京都大学工学研究科　正会員　西村直志
京都大学工学研究科　フェロー　小林昭一

1 序

境界積分方程式法は境界のみに未知関数が発生するため、当初は効率の良い数値解法であることが期待されたが、行列が密になる事が障害となり、その適用は案外小さい問題に限られてきた。ところが、最近、多重極展開を用いた解法が提案され [1]、大規模な問題の解析が可能になってきた。本報では3次元静弾性クラック問題のガラーキン積分方程式法に多重極法の適用を試みその有効性を示すとともに、応用例として多数のクラックが存在する時の解析も行った。

2 ガラーキン積分方程式

今、3次元無限領域の中に、一般には複数の互いに交わらない曲線からなるクラック S があるとする。3次元弾性方程式のクラック問題は次の境界値問題の解を求めることに帰着される。

$$\Delta^*_{ik}u_{ik}=0 \quad \text{in } R^3, \quad \boldsymbol{t}=0 \quad \text{on } S, \quad \boldsymbol{t}\to\boldsymbol{t}^\infty \quad \text{as } |x|\to\infty, \quad \boldsymbol{\phi}:=\boldsymbol{u}^+-\boldsymbol{u}^-=0 \quad (\text{on } \partial S)\ .$$

ここに Δ^*_{ik} は Navier の演算子、$\boldsymbol{t}$ はトラクション、$\boldsymbol{t}^\infty$ は漸近場、$\boldsymbol{\phi}$ は開口変位である。また、上付きの $+\,(-)$ は S の法線が向く側からの極限、ないしはその反対を指す。この問題の解くべきガラーキン積分方程式は

$$\int_S \psi_a(x)t^\infty_a(x)dS_x=-\int_S\psi_a(x)\ \text{p.f.}\int_S n_b(x)C_{abik}\frac{\partial}{\partial x_k}\frac{\partial}{\partial y_l}\Gamma_{ij}(x-y)C_{cdjl}n_c(y)\phi_d(y)dS_y\ dS_x\ . \tag{1}$$

となる。ここに、ψ は $\psi(x)=0$ (on ∂S) を満たす任意関数、Γ_{ij} は3次元静弾性方程式の基本解であり、$\Gamma_{ij}(x-y)=\frac{1}{8\pi\mu}\left(\delta_{ij}\frac{\partial}{\partial x_l}\frac{\partial}{\partial x_l}-\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j}\right)|x-y|$ と書ける。また、応力関数を用いると上式は次のように書き換えられる。

$$\int_S \psi_a(x)t^\infty_a(x)S_x=-\int_S n_b(x)e_{bjq}\frac{\partial\psi_a(x)}{\partial x_j}\int_S e_{aip}e_{dls}\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial y_l}\Phi_{pqrs}(x-y)n_c(y)e_{ckr}\frac{\partial\phi_d(y)}{\partial y_k}dS_y\ dS_x\ . \tag{2}$$

ここに、$\Phi_{pqrs}(x-y)$ は応力関数で、次のように書ける。

$$\Phi_{pqrs}(x-y)=\frac{\mu}{8\pi(\lambda+2\mu)}\left(2\lambda\delta_{pq}\delta_{rs}+(\lambda+2\mu)(\delta_{pr}\delta_{qs}+\delta_{ps}\delta_{qr})\right)|x-y|\ .$$

多重極法では、近傍の境界要素からの影響を従来の方法と同じように直接計算し、遠方からの影響を多重極展開を行って計算するが、前者には応力関数で正則化された積分方程式 (2) を、後者には (1) を用いる。

3 多重極展開の定式化

基本解の形から $|x-y|$ を展開することを考える。$|x-y|$ は次のように展開される。

$$|x-y|=\sum_{N=0}^{\infty}\sum_{M=-N}^{N}\left(\frac{S_{N,M}(\overrightarrow{Ox})\overline{U_{N,M}(\overrightarrow{Oy})}}{2N+3}-\frac{T_{N,M}(\overrightarrow{Ox})\overline{R_{N,M}(\overrightarrow{Oy})}}{2N-1}\right)\qquad(|\overrightarrow{Ox}|>|\overrightarrow{Oy}|)\ . \tag{3}$$

ただし、$R_{N,M},S_{N,M},U_{N,M},T_{N,M}$ は原点 O からの点 x の極座標を (r,θ,ϕ) とすると次のように書ける。

$$R_{N,M}(\overrightarrow{Ox})=\frac{1}{(N+M)!}P^M_N(\cos\theta)e^{iM\phi}r^N\ ,S_{N,M}(\overrightarrow{Ox})=(N-M)!P^M_N(\cos\theta)e^{iM\phi}\frac{1}{r^{N+1}}\ ,$$

$$U_{N,M}(\overrightarrow{Ox})=r^2R_{N,M}(\overrightarrow{Ox})\ ,T_{N,M}(\overrightarrow{Ox})=r^2S_{N,M}(\overrightarrow{Ox})\ .$$

キーワード: BIEM; FMM; GBIEM; GMRES
連絡先:〒606-8501 京都市左京区吉田本町　TEL: 075-753-5115　FAX: 075-753-5066

今、(1) の右辺の二重積分で、クラックの部分 S_y からクラックの部分 S_x への影響を計算する。

$$
\begin{aligned}
&-\int_{S_x}\psi_a(x)\ \text{p.f.}\int_{S_y} n_b(x)C_{abik}\frac{\partial}{\partial x_k}\frac{\partial}{\partial y_l}\Gamma_{ij}(x-y)C_{cdjl}n_c(y)\phi_d(y)dS_y dS_x \\
&= -\frac{1}{8\pi\mu}\sum_{N=0}^{\infty}\sum_{M=-N}^{N}\left(\int_{S_x}\psi_a(x)n_b(x)C_{abik}\frac{\partial}{\partial x_k}F^s_{ij,N,M}(\overrightarrow{Ox})\int_{S_y}C_{cdjl}\frac{\partial}{\partial y_l}\overline{R_{N,M}}(\overrightarrow{Oy})\phi_d(y)n_c(y)dS_y\ dS_x\right. \\
&+ \left.\int_{S_x}\psi_a(x)n_b(x)C_{abik}\frac{\partial}{\partial x_k}G^s_{i,N,M}(\overrightarrow{Ox})\int_{S_y}C_{cdjl}\frac{\partial}{\partial y_l}((\overrightarrow{Oy})_j R_{N,M}(\overrightarrow{Oy}))\phi_d(y)n_c(y)dS_y dS_x\right).
\end{aligned}
$$

ここでは、不等式 $|\overrightarrow{Ox}|(x\in S_x) > |\overrightarrow{Oy}|(y\in S_y)$ が成立しているものとする。なお、関数 F^S, G^S は次のように書くことが出来る。

$$
F^S_{ij,N,M}(\overrightarrow{Ox}) = \frac{\lambda+3\mu}{\lambda+2\mu}\delta_{ij}S_{N,M}(\overrightarrow{Ox}) - \frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}(\overrightarrow{Ox})_j\frac{\partial}{\partial x_i}S_{N,M}(\overrightarrow{Ox})\ ,\ G^S_{i,N,M}(\overrightarrow{Ox}) = \frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}\frac{\partial}{\partial x_i}S_{N,M}(\overrightarrow{Ox})\ .
$$

これを用いて多重極法のアルゴリズム [2] に従って計算をする。連立方程式の解法としては、前処理付き GMRES を用いた。

4 数値解析例

まず、一軸引張応力が作用する無限領域にクラックが1つ存在する問題でクラックの開口変位の計算を考える。この場合、未知数が約 1200 以上になると多重極法を用いた方がプログラムの実行時間が速くなり、3次元静弾性クラック問題における多重極法の有効性を示すことができた。さらに、一軸引張応力が作用する無限領域に 512 個のクラック (総未知数 241,152、クラックの法線方向及び半径はランダム、計算時間 20902 秒) の開口変位を計算したのが図 1である。なお計算機には DEC-ALPHA600MHz を搭載したコンピューターを使用した。

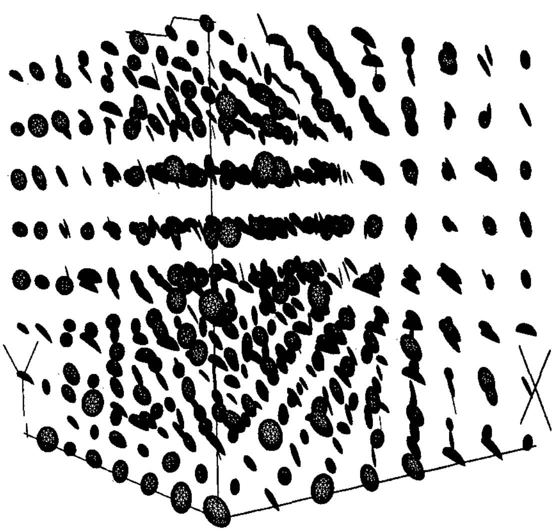

図 1: クラック 512 個 (8 × 8 × 8)(総未知数 241,152)

参考文献

[1] V. Rokhlin: Rapid solution of inegral equations of classical potential theory, J. Comp. Phys., 60 , 1985, pp.187–207.

[2] Leslie Greegard: The Rapid Evaluation of Potential Fields in Particle Systems , The MIT Press 1987

[3] 吉田研一, 西村直志, 小林昭一: 多重極積分方程式法を用いた3次元静弾性クラック問題の解析, 応用力学論文集, 1998, pp.365–372